以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 4 ページの正規分布表を用いてもよい．

1, 2, 3, 4 の数字がそれぞれ一つずつ書かれた 4 枚の白のカードが箱 A に，1, 2, 3, 4 の数字がそれぞれ一つずつ書かれた 4 枚の赤のカードが箱 B に入っている．箱 A，B からそれぞれ 1 枚ずつのカードを無作為に取り出し，取り出したカードの数字を確認してからもとに戻す試行について，次のように確率変数 X, Y を定める．

「確率変数 X」

取り出した白のカードに書かれた数と赤のカードに書かれた数の**小さい方**の数 (書かれた数が等しい場合はその数) を X の値とする．

「確率変数 Y」

取り出した白のカードに書かれた数と赤のカードに書かれた数の**大きい方**の数 (書かれた数が等しい場合はその数) を Y の値とする．

太郎さんは，この試行を 2 回繰り返したときに記録された 2 個の数の平均値 $t_2 = 2.50$ と，100 回繰り返したときに記録された 100 個の数の平均値 $t_{100} = 2.95$ が書いてあるメモを見つけた．メモに関する**太郎さんの記憶**は次のとおりである．

太郎さんの記憶

メモに書かれていた t_2 と t_{100} は「確率変数 X」の平均値である．

太郎さんは，このメモに書かれていた t_2 と t_{100} が「確率変数 X」か「確率変数 Y」のうちどちらか一方の平均値であったことは覚えていたが，**太郎さんの記憶**における「確率変数 X」の部分が確かでなく，もしかしたら「確率変数 Y」だったかもしれないと感じている．このことについて，太郎さんが花子さんに相談したところ，花子さんは，太郎さんが見つけたメモに書かれていた二つの平均値をもとにして**太郎さんの記憶**が正しいかどうかがわかるのではないかと考えた．

(1) $X = 1$ となるのは，白のカード，赤のカードともに 1 か，白のカードが 1 で赤のカードが 2 以上か，赤のカードが 1 で白のカードが 2 以上の場合であり，全部で $\boxed{\text{ア}}$ 通りある．$X = 2$, 3, 4 についても同様に考えることにより，X の確率分布は

X	1	2	3	4	計
P	$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{16}$	$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{16}$	$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{16}$	$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{16}$	1

となることがわかる．また，Y の確率分布は

Y	1	2	3	4	計
P	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{16}$	$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{16}$	$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{16}$	1

となる．

確率変数 Z を $Z = \boxed{\text{ク}} - X$ とすると，Z の確率分布と Y の確率分布は同じであることがわかる．

(2) 確率変数 X の平均 (期待値) と標準偏差はそれぞれ

$$E(X) = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{8}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

となる．このことと，(1) の確率変数 Z に関する考察から，確率変数 Y の平均は

$$E(Y) = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{8}$$

となり，標準偏差は $\sigma(Y) = \boxed{\text{ス}}$ となる．

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $\{\sigma(X)\}^2$	① $5 - \sigma(X)$	② $5\sigma(X)$	③ $\sigma(X)$

(3) 確率変数 X, Y の分布から**太郎さんの記憶**が正しいかどうかを推測しよう．

X の確率分布をもつ母集団を考え，この母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本を確率変数 X_1，X_2，$\cdots$，X_n とし，標本平均を $\overline{X}$ とする．Y の確率分布をもつ母集団を考え，この母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本を確率変数 Y_1，Y_2，$\cdots$，Y_n とし，標本平均を $\overline{Y}$ とする．

(i) メモに書かれていた，$t_2 = 2.50$ について考えよう．

花子さんは，$\overline{X} = 2.50$ となる確率 $P(\overline{X} = 2.50)$ と $\overline{Y} = 2.50$ となる確率 $P(\overline{Y} = 2.50)$ を比較することで，太郎さんの記憶が正しいかどうかがわかるのではないかと考えた．

$\overline{X} = 2.50$ となる確率は，$X_1 + X_2 = 5$ となる確率であり，(1) の X の確率分布より

$$P(\overline{X} = 2.50) = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{64}$$

となり，(1) の Y の確率分布から，$P(\overline{Y} = 2.50) \boxed{\text{タ}} P(\overline{X} = 2.50)$ が成り立つことがわかる．

このことから，花子さんは，$t_2 = 2.50$ からでは**太郎さんの記憶**が正しいかどうかはわからないと考えた．

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ $<$	① $=$	② $>$

(ii) メモに書かれていた，$t_{100} = 2.95$ について考えよう．

n が大きいとき，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N(E(\overline{X}), \{\sigma(\overline{X})\}^2)$ に従い，$\sigma(\overline{X}) = \boxed{\text{チ}}$ である．$n = 100$ は大きいので，$\overline{X} = 2.95$ であったとすると，推定される母平均を m_X として，m_X の信頼度 95% の信頼区間は

$$\boxed{\text{ツ}} \leqq m_X \leqq \boxed{\text{テ}} \quad \cdots\cdots ①$$

となる．一方，$\overline{Y} = 2.95$ であったとすると，推定される母平均を m_Y として，m_Y の信頼度 95% の信頼区間は

$$\boxed{\text{ト}} \leqq m_Y \leqq \boxed{\text{ナ}} \quad \cdots\cdots ②$$

となることもわかる．ただし，$\boxed{\text{ツ}}$～$\boxed{\text{ナ}}$ の計算においては，$\sqrt{55} = 7.4$ とする．

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

⓪ $\{\sigma(X)\}^2$	① $\dfrac{\sigma(X)}{n}$	② $\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$	③ $\dfrac{\{\sigma(X)\}^2}{n}$

$\boxed{\text{ツ}}$～$\boxed{\text{ナ}}$については，最も適当なものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪ 1.693	① 1.875	② 2.057
③ 2.740	④ 2.769	⑤ 2.798
⑥ 3.102	⑦ 3.131	⑧ 3.160

花子さんは，次の基準により太郎さんの記憶が正しいかどうかを判断することにした．ただし，基準が適用できない場合には，判断しないものとする．

基準

① の信頼区間に E(X) が含まれていて，② の信頼区間に E(Y) が含まれていないならば，太郎さんの記憶は正しいものとする．① の信頼区間に E(X) が含まれず，② の信頼区間に E(y) が含まれているならば，太郎さんの記憶は正しくないものとする．

$E(X)$ は ① の信頼区間に $\boxed{\text{ニ}}$．$E(Y)$ は ② の信頼区間に $\boxed{\text{ヌ}}$．

以上より，太郎さんの記憶については，$\boxed{\text{ネ}}$ ．

$\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ 含まれている	① 含まれていない

$\boxed{\text{ネ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

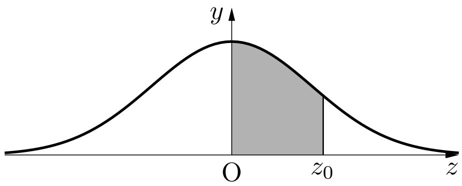
⓪ 正しいと判断され，メモに書かれていた t_2 と t_{100} は「確率変数 X」の平均値である

① 正しくないと判断され，メモに書かれていた t_2 と t_{100} は「確率変数 Y」の平均値である

② 基準が適用できないので，判断しない

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

(23 共通テスト 追・再試験 IIB 3)

【答】	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケコ	サシ	ス	セソ	タ	チ	ツ
	1	5	3	1	5	3	1	5	15	25	3	11	1	2	4

テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
7	4	7	1	0	1

【解答】

(1) $X=1$ となるのは，白のカード，赤のカードともに 1 か，白のカードが 1 で赤のカードが 2 以上か，赤のカードが 1 で白のカードが 2 以上の場合であり，全部で

$$\underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{1}+\underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{3}+\underset{\text{赤}}{1}\cdot\underset{\text{白}}{3}=\mathbf{7} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

通りある．

$X=2,\ 3,\ 4$ についても同様に考えると

$$X=2:\quad \underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{1}+\underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{2}+\underset{\text{赤}}{1}\cdot\underset{\text{白}}{2}=5$$

$$X=3:\quad \underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{1}+\underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{1}+\underset{\text{赤}}{1}\cdot\underset{\text{白}}{1}=3$$

$$X=4:\quad \underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{1}=1$$

であり，X の確率分布は

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

となることがわかる．また，$Y=1,\ 2,\ 3,\ 4$ となるのは

$$Y=1:\quad \underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{1}=1$$

$$Y=2:\quad \underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{1}+\underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{1}+\underset{\text{赤}}{1}\cdot\underset{\text{白}}{1}=3$$

$$Y=3:\quad \underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{1}+\underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{2}+\underset{\text{赤}}{1}\cdot\underset{\text{白}}{2}=5$$

$$Y=4:\quad \underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{1}+\underset{\text{白}}{1}\cdot\underset{\text{赤}}{3}+\underset{\text{赤}}{1}\cdot\underset{\text{白}}{3}=7$$

であり，Y の確率分布は

Y	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

となる．

$X,\ Y$ の確率分布表より，$X+Y=5$ となる $P(X),\ P(Y)$ の確率は等しいから，確率変数 Z を

$$Z=\mathbf{5}-X \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

とすると，Z の確率分布と Y の確率分布は同じであることがわかる．

(2) 確率変数 X の平均 (期待値) は

$$\begin{aligned}E(X)&=1\cdot\frac{7}{16}+2\cdot\frac{5}{16}+3\cdot\frac{3}{16}+4\cdot\frac{1}{16}\\&=\frac{7+10+9+4}{16}=\frac{30}{16}=\boldsymbol{\frac{15}{8}}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，標準偏差は $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{55}}{8}$ である．

- $\sigma(X)$ の値は問題文で与えられているが，次のように計算される．

$$\begin{aligned}\{\sigma(X)\}^2 &= 1^2\cdot\frac{7}{16}+2^2\cdot\frac{5}{16}+3^2\cdot\frac{3}{16}+4^2\cdot\frac{1}{16}-\left(\frac{15}{8}\right)^2\\ &= \frac{7+20+27+16}{16}-\left(\frac{15}{8}\right)^2\\ &= \frac{35}{8}-\left(\frac{15}{8}\right)^2=\frac{280-225}{8^2}\\ &= \frac{55}{8^2}\\ \therefore\quad \sigma(X) &= \frac{\sqrt{55}}{8}\end{aligned}$$

このことと，(1) の確率変数 Z に関する考察から，確率変数 Y の平均は

$$E(Y)=E(Z)=E(5-X)=5-E(X)=5-\frac{15}{8}=\boldsymbol{\frac{25}{8}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となり，標準偏差 $\sigma(Y)$ は

$$\sigma(Y)=\sigma(Z)=\sigma(5-X)=|-1|\sigma(X)=\boldsymbol{\sigma(X)}\quad (③) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

(3) (i) $\overline{X}=2.50$ となる確率は，$\dfrac{X_1+X_2}{2}=2.50$，すなわち，$X_1+X_2=5$ となる確率であり，$X_1+X_2=5$ となるのは

$$(X_1,\ X_2)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

のときである．(1) の X の確率分布より

$$\begin{aligned}P(\overline{X}=2.50) &= \frac{7}{16}\cdot\frac{1}{16}+\frac{5}{16}\cdot\frac{3}{16}+\frac{3}{16}\cdot\frac{5}{16}+\frac{1}{16}\cdot\frac{7}{16}\\ &= \frac{7+15+15+7}{16^2}\\ &= \boldsymbol{\frac{11}{64}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

となる．

また，$Y_1+Y_2=5$ となるのも

$$(Y_1,\ Y_2)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

のときであり，(1) の Y の確率分布から

$$\begin{aligned}P(\overline{Y}=2.50) &= \frac{1}{16}\cdot\frac{7}{16}+\frac{3}{16}\cdot\frac{5}{16}+\frac{5}{16}\cdot\frac{3}{16}+\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{16}\\ &= \frac{11}{64}\end{aligned}$$

となり

$$P(\overline{Y}=2.50)=P(\overline{X}=2.50)\quad (①) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

が成り立つことがわかる．

- Y の確率分布は $5-X$ の確率分布は同じであるから

$$\overline{Y}=\frac{Y_1+Y_2}{2}=\frac{(5-X_1)+(5-X_2)}{2}=5-\frac{X_1+X_2}{2}=5-\overline{X}$$

であり

$$\begin{aligned}&P(\overline{Y}=2.50)=P(5-\overline{X}=2.50)=P(\overline{X}=2.50)\\ \therefore\quad &P(\overline{Y}=2.50)=P(\overline{X}=2.50)\end{aligned}$$

が成り立つ．

このことから，花子さんは，$t_2=2.50$ からでは太郎さんの記憶が正しいかどうかはわからないと考えた．

(ii) n が大きいとき，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N(E(\overline{X}),\ \{\sigma(\overline{X})\}^2)$ に従い，

$$\sigma(\overline{X}) = \boldsymbol{\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}} \quad (②) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 確認しておこう．

$$\begin{aligned}\sigma(\overline{X}) &= \sqrt{V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2}\{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2}\{\underbrace{\sigma(X)^2 + \sigma(X)^2 + \cdots + \sigma(X)^2}_{n\text{ 個}}\}} \\ &= \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

$n = 100$ は大きいので，$\overline{X} = 2.95$ であったとすると，$Z = \dfrac{\overline{X} - m_X}{\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．推定される母平均 m_X の信頼度 95% の信頼区間は，正規分布表より $P(|Z| \leqq z_0) \fallingdotseq 0.95$ を満たす z_0 は $z_0 = 1.96$ であるから

$$-1.96 \leqq Z \leqq 1.96$$

$$-1.96 \leqq \frac{2.95 - m_X}{\dfrac{\dfrac{\sqrt{55}}{8}}{\sqrt{100}}} \leqq 1.96$$

$\sqrt{55} = 7.4$ として式を変形すると

$$-1.96 \times \frac{7.4}{80} \leqq 2.95 - m_X \leqq 1.96 \times \frac{7.4}{80}$$

$$-0.1813 \leqq 2.95 - m_X \leqq 0.1813$$

$$2.7687 \leqq m_X \leqq 3.1313$$

小数第四位を四捨五入すると

$$\boldsymbol{2.769} \leqq m_X \leqq \boldsymbol{3.131} \quad (④),\ (⑦) \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．一方，$\overline{Y} = 2.95$ であったとすると，推定される母平均 m_Y の信頼度 95% の信頼区間は

$$-1.96 \leqq \frac{2.95 - m_Y}{\dfrac{\dfrac{\sqrt{55}}{8}}{\sqrt{100}}} \leqq 1.96$$

同じく

$$\boldsymbol{2.769} \leqq m_Y \leqq \boldsymbol{3.131} \quad (④),\ (⑦) \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となることもわかる．

$E(X) = \dfrac{15}{8} = 1.875$ は ① の信頼区間に含まれていない．　(①)　……(答)

$E(Y) = \dfrac{25}{8} = 3.125$ は ② の信頼区間に含まれている．　(⓪)　……(答)

基準より，太郎さんの記憶については，正しくないと判断され，メモに書かれていた $\boldsymbol{t_2}$ と $\boldsymbol{t_{100}}$ は「確率変数 $\boldsymbol{Y}$」の平均値であると判断される．　(①)　……(答)