

方程式

$$8 \cdot 16^x - 18 \cdot 8^x - 61 \cdot 4^x + 18 \cdot 2^x + 8 = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

について、次の問いに答えよ。

- (i) $2^x = y$ とおいて、(1) を y に関する方程式に書きかえよ。
 (ii) 方程式 (1) を解け。

(23 東北学院大 文系・情報 A 3)

【答】

- (i) $8y^4 - 18y^3 - 61y^2 + 18y + 8 = 0$
 (ii) $x = 2$ または -1

【解答】

$$8 \cdot 16^x - 18 \cdot 8^x - 61 \cdot 4^x + 18 \cdot 2^x + 8 = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

- (i) (1) $\iff 8 \cdot (2^x)^4 - 18 \cdot (2^x)^3 - 61 \cdot (2^x)^2 + 18 \cdot 2^x + 8 = 0$
 であり、 $2^x = y$ とおくと

$$8y^4 - 18y^3 - 61y^2 + 18y + 8 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

となる。

- (ii) $y \neq 0$ より、 $\textcircled{1}$ の辺々を y^2 で割ると

$$8y^2 - 18y - 61 + \frac{18}{y} + \frac{8}{y^2} = 0$$

$$8\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + 8 \cdot 2 \cdot y \cdot \frac{1}{y} - 18\left(y - \frac{1}{y}\right) - 61 = 0$$

$$8\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 - 18\left(y - \frac{1}{y}\right) - 45 = 0$$

$$\left(4y - \frac{4}{y} - 15\right)\left(2y - \frac{2}{y} + 3\right) = 0$$

$$(4y^2 - 15y - 4)(2y^2 + 3y - 2) = 0$$

$$(4y + 1)(y - 4)(2y - 1)(2y + 2) = 0$$

$y = 2^x > 0$ より

$$y = 4 \text{ または } \frac{1}{2}$$

$$2^x = 2^2 \text{ または } 2^{-1}$$

$$\therefore x = 2 \text{ または } -1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。