n を自然数とするとき，$6^{100}\cdot 10^n$ が 100 桁の数となるような n の値を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010,\ \log_{10}3=0.4771$ とする．

(23 岩手大 後 理工 3(2))

【答】 $n=22$

【解答】

$6^{100}\cdot 10^n$ が 100 桁の数となるのは，自然数 n が

$$10^{99}\leqq 6^{100}\cdot 10^n<10^{100}$$

を満たすときである．常用対数をとると

$$99\leqq \log_{10}(6^{100}\cdot 10^n)<100 \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}\log_{10}(6^{100}\cdot 10^n)&=100(\log_{10}2+\log_{10}3)+n\\&=100(0.3010+0.4771)+n\\&=77.81+n\end{aligned}$$

であるから

$$① \iff 99\leqq 77.81+n<100$$
$$\therefore\quad 21.19\leqq n<22.19$$

これを満たす自然数 n は

$$\boldsymbol{n=22} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．