

不等式

$$(\log_x 9 - 1) \log_3 y + \log_3 x \leq \left( \log_3 \frac{y}{x} + 2 \right) \log_x y$$

を満たすような  $x, y$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $\log_3 x = A$  とするとき、 $\log_x 9$  を  $A$  で表せ。さらに  $\log_3 y = B$  とするとき、 $\log_3 \frac{y}{x}$  および  $\log_x y$  をそれぞれ  $A, B$  で表せ。  
 (2) 点  $(x, y)$  の存在する範囲を  $xy$  平面上に図示せよ。

(23 岩手大 農 5)

【答】

(1)  $\log_x 9 = \frac{2}{A}$ ,  $\log_3 \frac{y}{x} = B - A$ ,  $\log_x y = \frac{B}{A}$

(2) 略

【解答】

$$(\log_x 9 - 1) \log_3 y + \log_3 x \leq \left( \log_3 \frac{y}{x} + 2 \right) \log_x y \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

底条件, 真数条件をまとめると

$$\begin{cases} 0 < x < 1, 1 < x \\ y > 0 \\ x > 0 \\ \frac{y}{x} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 1, 1 < x \\ y > 0 \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。

- (1) ②のもとで考える。  $\log_3 x = A$  であるから

$$\log_x 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 x} = \frac{2}{A} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。さらに、 $\log_3 y = B$  であるから

$$\log_3 \frac{y}{x} = \log_3 y - \log_3 x = B - A, \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$\log_x y = \frac{\log_3 y}{\log_3 x} = \frac{B}{A} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。

- (2) (1)の結果を用いると

$$\textcircled{1} \iff \left( \frac{2}{A} - 1 \right) B + A \leq (B - A + 2) \frac{B}{A}$$

式を整理すると

$$\begin{aligned} \frac{2B}{A} + A - B &\leq \frac{B^2}{A} - B + \frac{2B}{A} \\ \therefore A &\leq \frac{B^2}{A} \quad \therefore \frac{A^2 - B^2}{A} \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}' \end{aligned}$$

となる。

(i)  $A > 0$  ( $x > 1$ ) のとき

$$\begin{aligned} \textcircled{1}' &\iff A^2 \leq B^2 \iff B \leq -A \text{ または } A \leq B \\ &\iff \log_3 y \leq -\log_3 x \text{ または } \log_3 x \leq \log_3 y \end{aligned}$$

② かつ  $x > 1$  のもとで、式を整理すると

$$\therefore \begin{cases} x > 1 \\ 0 < y \leq \frac{1}{x} \end{cases} \text{ または } 1 < x \leq y$$

である。

(ii)  $A < 0$  ( $0 < x < 1$ ) のとき

$$\begin{aligned} \textcircled{1}' &\iff A^2 \geq B^2 \iff A \leq B \leq -A \\ &\iff \log_3 x \leq \log_3 y \leq -\log_3 x \end{aligned}$$

② かつ  $0 < x < 1$  のもとで、式を整理すると

$$\therefore 0 < x \leq y \leq \frac{1}{x}$$

である。

以上 (i), (ii) より、点  $(x, y)$  の存在する範囲は下図の斜線部分である。ただし、境界線については、点線部分と白丸 (すなわち座標軸上の点と直線  $x = 1$  上の点) は含まず、実線部分の点は含む。

