方程式 $\log_2 x - \log_x 64 = 1$ を解きなさい．

(23 岩手県大 ソフト情 1(1))

【答】 $x = \dfrac{1}{4},\ 8$

【解答】

$$\log_2 x - \log_x 64 = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

真数と底の条件から

$$0 < x < 1,\ 1 < x \qquad \cdots\cdots ②$$

である．② のもとで ① を変形する．

$$\begin{aligned}
&\log_2 x - \frac{\log_2 2^6}{\log_2 x} = 1 \\
&(\log_2 x)^2 - 6 = \log_2 x \quad (\because\ ②) \\
&(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 = 0 \\
&(\log_2 x + 2)(\log_2 x - 3) = 0 \\
&\log_2 x = -2,\ 3 \\
&x = 2^{-2}, 2^3 \\
&x = \frac{1}{4},\ 8
\end{aligned}$$

を得る．これらは ② を満たす．よって

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{4},\ 8} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．