$a,\ b$ は $a \geqq b,\ 4b > a,\ ab > 4$ を満たす自然数とする．三角形 ABC において，$\mathrm{AB} = 2,\ \mathrm{BC} = \log_2 a,\ \mathrm{CA} = \log_2 b$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 三角形 ABC の周の長さが $4 + \log_2 3 + \log_2 5$ となる自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた自然数の組 $(a,\ b)$ において，$\mathrm{AB} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{CA}$ の最大値と最小値を求めよ．

(23 弘前大 人文・教育・医・農 1)

【答】

(1) $(a, b) = (15,\ 4),\ (12,\ 5),\ (10,\ 6)$

(2) 最大値 $2(1 + \log_2 5)(1 + \log_2 3)$，最小値 $4(\log_2 3 + \log_2 5)$

【解答】

(1) $\triangle$ABC の周の長さが $4 + \log_2 3 + \log_2 5$ となるのは

$$2 + \log_2 a + \log_2 b = 4 + \log_2 3 + \log_2 5$$
$$\log_2(4ab) = \log_2(2^4 \cdot 3 \cdot 5)$$
$$\therefore \quad ab = 60$$

$a,\ b$ が自然数で，$a \geqq b$ だから

$$(a,\ b) = (60,\ 1),\ (30,\ 2),\ (20,\ 3),\ (15,\ 4),\ (12,\ 5),\ (10,\ 6)$$

このうち，$4b > a,\ ab > 4$ を満たすのは

$$\boldsymbol{(a,\ b) = (15,\ 4),\ (12,\ 5),\ (10,\ 6)}$$ ……(答)

である．

- 問題文では三角形 ABC の存在が保証されているが，確認しておく．
  3 辺の長さが 2，$\log_2 a, \log_2 b$ となる三角形の成立条件は，$a,\ b$ が自然数で $a \geqq b$ であることに注意すると

$$\begin{cases} \log_2 b + 2 > \log_2 a \\ \log_2 a + \log_2 b > 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4b > a \\ ab > 4 \end{cases}$$

  である．これは与えられた条件そのものであるから，三角形の存在は確認された．

(2) (1) の $(a,\ b)$ に対する $\mathrm{AB} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{CA} = 2\log_2 a \log_2 b$ の値をそれぞれ $p,\ q,\ r$ とおくと

$$p = 2\log_2 15 \log_2 4 = 2(\log_2 3 + \log_2 5) \times 2 = 4(\log_2 3 + \log_2 5),$$
$$q = 2\log_2 12 \log_2 5 = 2(2 + \log_2 3)\log_2 5,$$
$$r = 2\log_2 10 \log_2 6 = 2(1 + \log_2 5)(1 + \log_2 3)$$

である．

$$r - q = 2(1 + \log_2 3 - \log_2 5) = 2(\log_2 6 - \log_2 5) > 0$$
$$q - p = 2\log_2 3(\log_2 5 - 2) = 2\log_2 3(\log_2 5 - \log_2 4) > 0$$

であるから

$$r > q > p$$

が成り立つ．よって，$\mathrm{AB} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{CA}$ の

最大値 は $r = \boldsymbol{2(1 + \log_2 5)(1 + \log_2 3)}$ ……(答)

最小値 は $p = \boldsymbol{4(\log_2 3 + \log_2 5)}$ ……(答)

である．