不等式

$$8(\log_2 \sqrt{x})^2 - 3\log_8 x^9 < 5$$

をみたす x の範囲を求めよ．

(23 札幌医大 1(2))

【答】 $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < 32$

【解答】

$$8(\log_2 \sqrt{x})^2 - 3\log_8 x^9 < 5 \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

(真数) > 0 より

$$\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ x^9 > 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad x > 0 \qquad \cdots\cdots\ ①$$

① のもとで $(*)$ を変形すると

$$8\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 - 27\log_8 x < 5$$

$$2(\log_2 x)^2 - 27\frac{\log_2 x}{\log_2 8} < 5$$

$$2(\log_2 x)^2 - 9\log_2 x - 5 < 0$$

$$(2\log_2 x + 1)(\log_2 x - 5) < 0$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2} < \log_2 x < 5$$

$$\therefore \quad 2^{-\frac{1}{2}} < x < 2^5$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 32 \quad (① \text{ を満たす})$$

よって，求める x の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 32} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．