不等式

$$\log_9 2x + \log_3 (x^2+3x-4)^2 \leqq 5\log_9 x + \log_3 \sqrt{2}$$

を満たす実数 x の値の範囲を求めよ．

(23 東北大 後 経 (文) 1)

【答】 $-2+2\sqrt{2} \leqq x \leqq -1+\sqrt{5}$ かつ $x \neq 1$

【解答】

$$\log_9 2x + \log_3 (x^2+3x-4)^2 \leqq 5\log_9 x + \log_3 \sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

(真数) > 0 より

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ (x^2+3x-4)^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ (x+4)(x-1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff x > 0 \text{ かつ } x \neq 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

② のもとで，① を変形する．底をそろえると

$$\frac{\log_3 2x}{\log_3 9} + \log_3 (x^2+3x-4)^2 \leqq 5\frac{\log_3 x}{\log_3 9} + \log_3 \sqrt{2}$$

$$\log_3 2x + 2\log_3 (x^2+3x-4)^2 \leqq 5\log_3 x + 2\log_3 \sqrt{2}$$

$$\log_3 2x(x^2+3x-4)^4 \leqq \log_3 2x^5 \qquad \cdots\cdots ①'$$

底は 3 であり，1 より大きいから

$$①' \iff 2x(x^2+3x-4)^4 \leqq 2x^5$$

$$\iff (x^2+3x-4)^4 \leqq x^4 \quad (\because\ x > 0)$$

因数分解すると

$$\{(x^2+3x-4)^2 - x^2\}\{(x^2+3x-4)^2 + x^2\} \leqq 0$$

$(x^2+3x-4)^2 + x^2 > 0$ に注意すると

$$\{(x^2+3x-4) - x\}\{(x^2+3x-4) + x\} \leqq 0$$

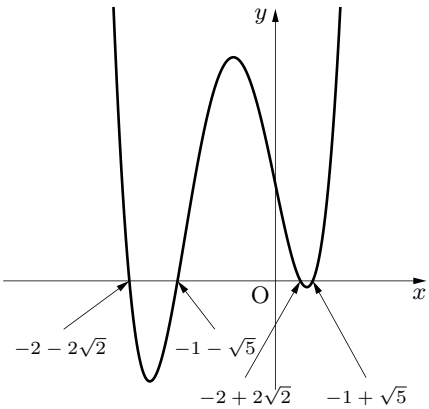
$$(x^2+2x-4)(x^2+4x-4) \leqq 0$$

$f(x) = (x^2+2x-4)(x^2+4x-4)$ とおき，
$f(x) = 0$ を解くと

$$x = -1 \pm \sqrt{5}, \quad -2 \pm 2\sqrt{2}$$

である．

$$\begin{aligned} &(-1+\sqrt{5}) - (-2+2\sqrt{2}) \\ &> (-1+2) + 2 - 2\sqrt{2} \\ &= 3 - \sqrt{8} > 0 \end{aligned}$$



に注意すると，$f(x) \leqq 0$ の解は

$$-2-2\sqrt{2} \leqq x \leqq -1-\sqrt{5}$$

または

$$-2+2\sqrt{2} \leqq x \leqq -1+\sqrt{5}$$

となる．$f(1) = -1 < 0$ と ② とあわせると，① の解は

$$\boldsymbol{-2+2\sqrt{2} \leqq x \leqq -1+\sqrt{5} \text{ かつ } x \neq 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．