$a>1,\ b>1$ のとき，次の不等式を証明しなさい．また，等号が成立するための必要十分条件を求めなさい．

$$\log_a b+\log_b a \geqq 2$$

(23 福島大 人間発達文化 1(2))

【答】 証明は略．等号が成立する条件は $a=b$ である．

【解答】

$$\log_a b+\log_b a \geqq 2 \qquad \cdots\cdots (*)$$

$a>1,\ b>1$ のとき，左辺のどちらの対数も底条件および真数条件を満たす．
底の変換公式より

$$((*)\text{ の左辺})=\log_a b+\frac{1}{\log_a b}$$

$a>1,\ b>1$ のとき，$\log_a b>0,\ \dfrac{1}{\log_a b}>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$((*)\text{ の左辺}) \geqq 2\sqrt{(\log_a b)\cdot\frac{1}{\log_a b}}=2 \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

が成り立ち，$(*)$ は示された．等号が成立するのは

$$\log_a b=\frac{1}{\log_a b}\ \text{すなわち}\ \log_a b=1(>0)\ \text{であり，}\quad \boldsymbol{a=b} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のときである．