

x, y は正の実数で. $x \neq 1, y \neq 1$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\log_x y > 0$ であるための, x と y に関する必要十分条件を求めよ.

(2) 次の不等式の表す領域を xy 平面上に図示せよ.

$$\log_x y - 2\log_y x > 1$$

(23 高知大 教育 1)

【答】

$$(1) \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$$

(2) 略

【解答】

$$(1) \quad \log_x y > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x, y は正の実数で. $x \neq 1, y \neq 1$ であるから, $\textcircled{1}$ において真数条件, 底条件は満たされている.

$$\textcircled{1} \iff \log_x y > \log_x 1$$

であるから, $\log_x y > 0$ であるための, x と y に関する必要十分条件は

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}' \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

$$(2) \quad \log_x y - 2\log_y x > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

x, y は正の実数で. $x \neq 1, y \neq 1$ であるから, $\textcircled{2}$ において真数条件, 底条件は満たされている.

$$\textcircled{2} \iff \log_x y - \frac{2}{\log_x y} > 1$$

式を整理すると

$$\begin{aligned} \frac{(\log_x y)^2 - \log_x y - 2}{\log_x y} &> 0 \\ \frac{(\log_x y + 1)(\log_x y - 2)}{\log_x y} &> 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}' \end{aligned}$$

となる.

(i) $\log_x y > 0$ ($\iff \textcircled{1}'$) のとき

$$\textcircled{2}' \iff (\log_x y + 1)(\log_x y - 2) > 0$$

$$\therefore \log_x y > 2$$

$$\therefore \log_x y > \log_x x^2$$

となる. $\textcircled{1}'$ とあわせると

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ y < x^2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \\ y > x^2 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < x^2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x > 1 \\ y > x^2 \end{cases} \end{aligned}$$

である.

(ii) $\log_x y < 0$ のとき

$$\textcircled{2}' \iff (\log_x y + 1)(\log_x y - 2) < 0$$

$$\therefore \log_x y > -1$$

$$\therefore \log_x y > \log_x x^{-1} \quad \dots\dots \textcircled{2}''$$

となる。また、(1) と同じく

$$\log_x y < 0 \iff \log_x y < \log_x 1 \iff \begin{cases} 0 < x < 1 \\ y > 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x > 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

であり、 $\textcircled{2}''$ とあわせると

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y > 1 \\ y < \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x > 1 \\ 0 < y < 1 \\ y > \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 1 < y < \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{x} < y < 1 \end{cases}$$

である。

求める領域は、(i) または (ii) で表される領域であり、右図の斜線部分となる。境界はすべて除く。

