数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1,\ a_{n+1}=7a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．以下の問いに答えよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010,\ \log_{10}3=0.4771,\ \log_{10}7=0.8451$ とする．

(1) a_n が 89 桁の整数となるとき，n を求めよ．
(2) n を (1) で求めたものとする．a_n の 1 の位の数字を求めよ．
(3) n を (1) で求めたものとする．a_n の最高位の数字を求めよ．

(23 岡山大 文系 2)

【答】

(1) $n=106$
(2) 7
(3) 5

【解答】

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=7a_n\quad (n\geqq 1)$$

(1) $\{a_n\}$ は初項 1，公比 7 の等比数列であり，一般項 a_n は

$$\boldsymbol{a_n}=1\cdot 7^{n-1}=7^{n-1}$$

である．$a_n=7^{n-1}$ が 89 桁の整数となるのは，自然数 n が次の不等式を満たすときである．

$$10^{88}\leqq 7^{n-1}<10^{89}$$
$$88\leqq (n-1)\log_{10}7<89$$

$\log_{10}7=0.8451$ より

$$\frac{88}{0.8451}\leqq n-1<\frac{89}{0.8451}$$
$$\therefore\quad 105.1\cdots\leqq n<106.3\cdots$$

n は自然数であるから

$$\boldsymbol{n=106}$$ ……(答)

である．

(2) $a_n=7^{n-1}\ (n\geqq 1)$ の 1 の位を表にすると

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
a_nの 1 の位	1	7	9	3	1	7	$\cdots$

a_n の 1 の位は周期 4 で 1, 7, 9, 3 を繰り返す．実際

$$7^{n+4}-7^n=(7^4-1)7^n=(7\text{ の倍数})$$

であり，任意の自然数 n に対し 7^{n+4} と 7^n の余りは等しい．$106=4\times 26+2$ だから a_{106} の 1 の位は $a_2=7$ と一致し

$$\boldsymbol{7}$$ ……(答)

である．

(3) 89 桁の整数 $a_{106}=7^{105}$ の最高位の数を a とおくと

$$a\cdot 10^{88}\leqq 7^{105}<(a+1)\cdot 10^{88}$$

が成り立つ．底 10 の対数をとると

$$88+\log_{10}a\leqq 105\log_{10}7<88+\log_{10}(a+1)$$

$105\log 7 = 105 \times 0.8451 = 88.7355$ より

$$\log_{10} a \leqq 0.7355 < \log_{10}(a+1)$$

ここで

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - 0.3010 = 0.6990,$$
$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$$

より

$$\log_{10} 5 < 0.7355 < \log_{10} 6 \qquad \therefore \quad a = 5$$

である．よって a_{106} の最高位の数は

5 ……(答)

である．