数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{7}{6}(a_n - 1)$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする．

(1) 一般項 a_n を求めよ．
(2) a_n が 89 桁の整数となるとき，n を求めよ．
(3) n を (2) で求めたものとする．a_n の 1 の位の数字を求めよ．
(4) n を (2) で求めたものとする．a_n の最高位の数字を求めよ．

(23 岡山大 理系 1)

【答】

(1) $a_n = 7^n$
(2) $n = 105$
(3) 7
(4) 5

【解答】

$$S_n = \frac{7}{6}(a_n - 1) \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ であるから，$n = 1$ のとき，$S_1 = a_1$ であり，① は

$$\frac{7}{6}(a_1 - 1) = a_1 \qquad \therefore \quad a_1 = 7$$

また，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ であり

$$\frac{7}{6}(a_{n+1} - 1) - \frac{7}{6}(a_n - 1) = a_{n+1}$$
$$7a_{n+1} - 7a_n = 6a_{n+1}$$
$$\therefore \quad a_{n+1} = 7a_n$$

が成り立つ．$\{a_n\}$ は初項 7，公比 7 の等比数列であり，一般項 a_n は

$$\boldsymbol{a_n} = 7 \cdot 7^{n-1} = \boldsymbol{7^n} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $a_n = 7^n$ が 89 桁の整数となるのは，自然数 n が次の不等式を満たすときである．

$$10^{88} \leqq 7^n < 10^{89}$$
$$88 \leqq n \log_{10} 7 < 89$$

$\log_{10} 7 = 0.8451$ より

$$\frac{88}{0.8451} \leqq n < \frac{89}{0.8451}$$
$$\therefore \quad 104.1 \cdots \leqq n < 105.3 \cdots$$

n は自然数であるから

$$\boldsymbol{n = 105} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) a_n $(n \geqq 1)$ の 1 の位を表にすると

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
a_nの 1 の位	7	9	3	1	7	9	$\cdots$

a_n の 1 の位は周期 4 で 7, 9, 3, 1 を繰り返す．実際

$$7^{n+4} - 7^n = (7^4 - 1)7^n = (7 \text{ の倍数})$$

であり，任意の自然数 n に対し 7^{n+4} と 7^n の余りは等しい．$105 = 4 \times 26 + 1$ だから a_{105} の 1 の位は $a_1 = 7$ と一致し

$$\mathbf{7} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) 89 桁の整数 $a_{105} = 7^{105}$ の最高位の数を a とおくと

$$a \cdot 10^{88} \leqq 7^{105} < (a+1) \cdot 10^{88}$$

が成り立つ．底 10 の対数をとると

$$88 + \log_{10} a \leqq 105 \log_{10} 7 < 88 + \log_{10}(a+1)$$

$105 \log 7 = 105 \times 0.8451 = 88.7355$ より

$$\log_{10} a \leqq 0.7355 < \log_{10}(a+1)$$

ここで

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - 0.3010 = 0.6990,$$

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$$

より

$$\log_{10} 5 < 0.7355 < \log_{10} 6 \qquad \therefore \quad a = 5$$

である．よって a_{105} の最高位の数は

$$\mathbf{5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．