以下の問いに答えなさい．

(2) 不等式 $\dfrac{3}{10} < \log_{10} 2 < \dfrac{4}{13}$ が成り立つことを示しなさい．
(3) 2^{64} の桁数を求めなさい．

(23 岩手県大 ソフト情 1(2)(3))

【答】

(2) 略
(3) 20

【解答】

(2)
$$\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13} \qquad \cdots\cdots ①$$

不等式 ① を同値変形すると

$$\begin{aligned} ① &\iff 10^{\frac{3}{10}} < 10^{\log_{10} 2} < 10^{\frac{4}{13}} \\ &\iff 10^{\frac{3}{10}} < 2 < 10^{\frac{4}{13}} \\ &\iff \begin{cases} 10^3 < 2^{10} & \cdots\cdots ② \\ 2^{13} < 10^4 & \cdots\cdots ③ \end{cases} \end{aligned}$$

であり，① が成り立つことを示すには,「② かつ ③」が成り立つことを示せばよい．

- $10^3 = 1000$，$2^{10} = 1024$ であるから，② は成り立ち，
- $2^{13} = 8192$，$10^4 = 10000$ であるから，③ も成り立つ．

よって，① は成り立つ． ……(証明終わり)

(3) 2^{64} の桁数を n (n は自然数) とおくと

$$10^{n-1} \leqq 2^{64} < 10^n \iff n - 1 \leqq 64 \log_{10} 2 < n$$

(2) より

$$\begin{aligned} &64 \times \frac{3}{10} < 64 \log_{10} 2 < 64 \times \frac{4}{13} \\ &19.2 < 64 \log_{10} 2 < 19.69 \cdots \\ &\therefore \quad n = \mathbf{20} \end{aligned}$$

……(答)

である．