今年の入試で気になった問題

東京都立戸山高等学校

2023 年 6 月 17 日 (土)

目 次

1　場合の数・確率

1 以下の設問 (1) から (5) に答えなさい．なお，答えは数字のみではなく，階乗の記号！を含んだ式で答えてもよい．

(1) 1 から 9 までの 9 個の自然数を一列に並べるとき，並べ方は全部で何通りあるかを答えなさい．

(2) 1 から 9 までの 9 個の自然数を正九角形の頂点の位置に並べるとき，並べ方は全部で何通りあるかを答えなさい．ただし，回転させて同じになる並べ方は一通りとみなす．

(3) 1 から 9 までの 9 個の自然数を図 1 のように，正八角形の各頂点とその中央に並べるとき，並べ方は全部で何通りあるかを答えなさい．ただし，回転させて同じになる並べ方は一通りとみなす．

(4) 1 から 9 までの 9 個の自然数を図 2 のように，正方形の各頂点と各辺の中点および，正方形の中央の合計 9 か所に並べるとき，並べ方は全部で何通りあるかを答えなさい．ただし，回転させて同じになる並べ方は一通りとみなす．

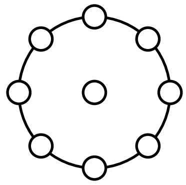


図 1

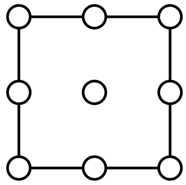


図 2

(5) 設問 (4) において，縦 3 列，横 3 行の数字 3 個ずつの和 6 個がすべて同じになるような並べ方は全部で何通りあるかを答えなさい．ただし，回転させて同じになる並べ方は一通りとみなす．

(23 和歌山大 後 シス工 1)

【1 – 1】黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる．ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする．

(1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ．

(2) どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ．

(23 東京大)

2　平面図形

$\boxed{\textbf{2}}$ 平面内の鋭角三角形 $\triangle$ABC を考える．$\triangle$ABC の内部の点 P に対して，

直線 BC に関して P と対称な点を D，
直線 CA に関して P と対称な点を E，
直線 AB に関して P と対称な点を F

とする．6 点 A，B，C，D，E，F が同一円周上にあるような P は $\triangle$ABC の内部にいくつあるか求めよ．

(23 京都大 特色入試)

【2 − 1】平面上の 3 点 A，B，C 間のそれぞれの距離が $\mathrm{AB} = 4x,\ \mathrm{BC} = x^2 + 3$，$\mathrm{CA} = x^2 + 2x - 3$ となっている．以下の問に答えよ．

(1) $\mathrm{AB} + \mathrm{CA} > \mathrm{BC}$ となる x の条件を求めよ．
(2) 点 A，B，C を頂点とする三角形が存在するための x の条件を求めよ．
(3) x が (2) の条件をみたすとき，$\angle\mathrm{A}$ の大きさを求めよ．
(4) x が (2) の条件をみたすとき，$\angle\mathrm{A},\ \angle\mathrm{B},\ \angle\mathrm{C}$ の大小関係を明らかにせよ．

(23 群馬大)

【2 − 2】正の実数 a に対して，xy 平面上に 2 点 A$(2,\ a)$，B$(2,\ -a)$ をとる．原点を中心とする単位円を $C : x^2 + y^2 = 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P が円 C 上を動くとき，$\triangle$APB の重心 G の軌跡を求めよ．
(2) 点 P が円 C 上を動くとき，$\triangle$APB の外心 Q の軌跡を求めよ．

(23 鳥取大)

3　立体図形

$\boxed{\mathbf{3}}$ 半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A，B，C，D が

$$\mathrm{AB} = 1, \quad \mathrm{AC} = \mathrm{BC}, \quad \mathrm{AD} = \mathrm{BD}, \quad \cos\angle\mathrm{ACB} = \cos\angle\mathrm{ADB} = \frac{4}{5}$$

を満たしているとする．

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(2) 四面体 ABCD の体積を求めよ．

(23 東京大)

【3 – 1】次の条件 (a)，(b) を満たす凸多面体を考える．

(a) 面は正三角形または正方形である．

(b) 合同な 2 つの面は辺を共有しない．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 一つの頂点を共有する面の数は 4 であることを証明せよ．

(2) 正三角形と正方形の面の数をそれぞれ求めよ．

(3) 正八面体を平面で何回か切断することで条件 (a)，(b) を満たす凸多面体が得られる．どのように切断するのか説明せよ．

(4) (3) の切断で得られる凸多面体を F とし，F の 1 辺の長さは 1 とする．F のすべての正三角形の面に接する球を B とする．B と F の共通部分の体積を求めよ．

(23 京都府医大)

4　数学 II の微分積分

$\boxed{4}$　$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 9$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 $(-3,\ 0)$ を通り曲線 $y = f(x)$ に接する直線と，曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) 点 $(-3,\ 0)$ と点 $(-1,\ f(-1))$ を通る直線と曲線 $y = f(x)$ のすべての交点の x 座標をそれぞれ求めよ．

(3) 方程式 $f(x) = m(x+3)$ が 3 つの相異なる整数解をもつような定数 m の値をすべて求めよ．

(23 岩手大)

【4 – 1】$y = x^3 - x^2 - 2x + 1$ で表される曲線を C，$y = -x + k$ で表される直線を l とする．ただし，k は実数とする．このとき，次の問いに答えよ．

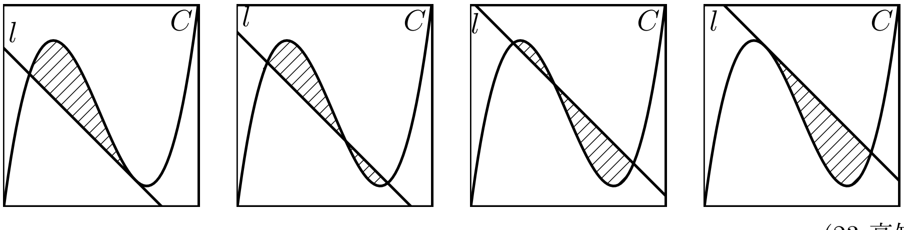
(1) $k = 1$ のとき，曲線 C と直線 l は 3 個の共有点をもつ．これらの共有点の x 座標のうち，最も小さい値を α とし，最も大きい値を β とする．このとき，$\alpha^2 + \beta^2$ と $\alpha^3 + \beta^3$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 曲線 C と直線 l が 2 個以上の相異なる共有点をもつように，k の値の範囲を定めよ．

(3) k の値を (2) で定めた範囲で動かすとき，曲線 C と直線 l で囲まれる部分は変化する．下の図はある 4 つの k のそれぞれの値に対して，囲まれる部分を斜線で示している．この様子を観察していた生徒が次の命題が成り立つと予想した．

「k は (2) で定めた範囲内にあるとする．このとき，曲線 C と直線 l で囲まれる部分の面積は，k の値によらず一定である．」

この命題の真偽を理由を付けて判定せよ．



(23 高知大)

5　解答例

$\boxed{1}$

(1) 異なる 9 個の数を一列に並べるときの並べ方は

　　9! 通り ……(答)

ある．

(2) 異なる 9 個の数を円形に並べるときの並べ方は

　　$(9-1)! = \mathbf{8!}$ **通り** ……(答)

ある．

(3) 中央に並べる数は 9 通りあり，残り 8 個の数を円形に並べる並べ方は，$(8-1)! = 7!$ 通りあるから，求める並べ方は全部で

　　9 · 7! 通り ……(答)

ある．

(4) 中央に並べる数は 9 通りあり，残りの 8 個の数を正方形の頂点と辺の中点に並べる並べ方は，8 個の中のある数に着目すると，その数が頂点にあるとき，辺の中点にあるときのどちらであっても 7! 通りの並べ方があるから，求める並べ方は全部で

　　$9 \cdot (7! + 7!) = \mathbf{18 \cdot 7!}$ **通り** ……(答)

ある．

(5) 行または列となる 3 個の数の合計は

$$\frac{1+2+\cdots+9}{3} = \frac{9\cdot(9+1)}{2}\cdot\frac{1}{3} = 15$$

であり，和が 15 になる 3 個の数の組合せは

$\{1,\ 5,\ 9\}$，$\{1,\ 6,\ 8\}$，
$\{2,\ 4,\ 9\}$，$\{2,\ 5,\ 8\}$，$\{2,\ 6,\ 7\}$，
$\{3,\ 4,\ 8\}$，$\{3,\ 5,\ 7\}$，
$\{4,\ 5,\ 6\}$

の 8 通りである．このうち異なる数からなる組の組合せは

A：$\{1,\ 5,\ 9\}$，$\{2,\ 6,\ 7\}$，$\{3,\ 4,\ 8\}$
B：$\{1,\ 6,\ 8\}$，$\{2,\ 4,\ 9\}$，$\{3,\ 5,\ 7\}$

の 2 組がある．A，B の一方が行で使われ，他方が列で使われる．

$+90°$ 回転 ($-90°$ 回転でもよい) で行と列は入れかわる．回転させて同じになる並べ方は一通りとみなすから，A が行で B が列として並ぶものとしてよい．

行の一つ $\{1,\ 5,\ 9\}$ がどの行でどのように並ぶかを考えると

　　$3 \cdot 3!$ 通り

の並び方がある．いま，$\{1,\ 5,\ 9\}$ が 1 行目で 1, 5, 9 の順に並ぶとすると，1 列目は 2 通りに決まり，残り 4 個の数は 1 通りに決まる．すなわち

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ または } \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ の　2 通り}$$

に決まる．したがって，回転による同一視を考えないときの配列は

$$3 \cdot 3! \times 2 = 36 \text{ 通り}$$

ある．この中から 180° 回転して一致するのものを除く．

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ を 180° 回転させた $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ は 36 通りの中では別表現として数えている．回転させて同じになる並べ方は一通りとみなすので，この 2 つの配列は一通りとみなす．他の場合も同様であり，36 通りは一通りとみなすべき配列をすべて二通りに数えているから，求める並べ方は

$$\frac{36}{2} = \mathbf{18} \textbf{ 通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

ある．

【1 – 1】12 個の玉を 1 個ずつ取り出すとき，個々の玉は等確率で取り出されるから，12 個の玉はすべて区別する．12 個の玉の取り出し方は

$$12! \text{ 通り}$$

あり，これらは同様に確からしい．

どの赤玉も隣り合わないという事象を A，どの黒玉も隣り合わないという事象を B とおく．

(1) 事象 A となる玉の並び方は，まず赤玉 4 個を除いた 8 個を取って並べ，つぎにその列の両端または間の 9 か所から 4 か所を選びながら赤玉を 1 個ずつ入れて並べたものである．このような並び方となる玉の取り出し方を数えると，求める確率 p は

$$p = P(A) = \frac{8! \times 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{12!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \mathbf{\frac{14}{55}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 求める確率 q は

$$q = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

である．事象 $A \cap B$ となる玉の並べ方を，まず白玉と黒玉を並べ，そのあとに赤玉を並べるものとして数える．

はじめに白玉と黒玉を並べる段階で，黒玉が何個連続して並ぶかで場合分けする．

(i) 黒玉が連続して並ばないとき

まず白玉を 5 個並べ，そのすき間と両端の計 6 か所のうち 3 か所を選びながら黒玉を 1 個ずつ入れ，そのあとに 8 個の玉のすき間と両端の計 9 か所のうち 4 か所を選びながら赤玉を 1 個ずつ入れる．このような並べ方となる玉の取り出し方は

$$5! \times 6 \cdot 5 \cdot 4 \times 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 10! \times 12 \text{ 通り}$$

ある．

(ii) 黒玉 3 個のうち 2 個だけが連続して並ぶとき

　2 個連続して並ぶ黒玉を 1 つのカタマリとみなして，BB と表すことにする．B_1B_2，B_2B_1 といった具合に 1 つのカタマリ BB には 2 通りの並び方がある．

　まず白玉を 5 個並べ，そのすき間と両端の計 6 か所のうち 2 か所に，カタマリ BB ともう 1 個の黒玉を入れる．そのあとにカタマリ BB のすき間の 1 か所と，白玉 5 個とカタマリ BB と 1 個の黒玉の 7 個のすき間と両端の計 8 か所のうち 3 か所に赤玉を 1 個ずつ入れる．このような並べ方となる玉の取り出し方は

$$5! \times {}_3C_2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \times {}_4C_1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 5! \times 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \times 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 10! \times 8 \text{ 通り}$$

ある．

(iii) 黒玉 3 個がすべて連続してして並ぶとき

　3 個連続して並ぶ黒玉を 1 つのカタマリとみなして，BBB と表すことにする．3 個の B はすべて区別しているから 3! 通りの並び方がある．まず白玉を 5 個並べ，そのすき間と両端の計 6 か所のうち 1 か所に，カタマリ BBB を入れる．そのあとにカタマリ BBB のすき間の 2 か所と，白玉 5 個とカタマリ BBB を並べた 6 個のすき間と両端の計 7 か所のうち 2 か所に，赤玉を 1 個ずつ入れる．このような並べ方となる玉の取り出し方は

$$5! \times 6 \cdot 3! \times 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 = 9! \times 6 \text{ 通り}$$

ある．

以上より

$$P(A \cap B) = \frac{9!(120+80+6)}{12!} \frac{206}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{103}{6 \cdot 11 \cdot 10} \left(= \frac{103}{660} \right)$$

よって，求める条件付き確率 q は

$$q = \frac{\dfrac{103}{6 \cdot 11 \cdot 10}}{\dfrac{14}{55}} = \frac{103}{14 \cdot 6 \cdot 2} = \boldsymbol{\frac{103}{168}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 事象 $A \cap B$ の確率を

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$$

として求めてもよい．$A \cap \overline{B}$ は赤玉は隣り合わないが，黒球は隣り合うという事象である．黒球が何個隣り合うかで場合分けする．

(i) 黒玉 3 個のうち 2 個だけが隣り合うとき

　2 個連続して並ぶ黒玉を 1 つのカタマリとみなして，BB と表すことにする．B_1B_2，B_2B_1 といった具合に 1 つのカタマリ BB には 2 通りの並び方がある（${}_3C_2 \cdot 2$ 通り）．

　まず白玉を 5 個並べ，そのすき間と両端に，カタマリ BB と 1 個の B を入れるとき BB と B が隣り合わない，隣り合うで場合分けし，赤玉 4 個を入れすこ

とを考えると，条件を満たす取り出し方は

$$
\begin{aligned}
&5! \times {}_3\mathrm{C}_2 \cdot 2(\underbrace{6 \cdot 5}_{\substack{\text{BB と B が}\\ \text{隣り合わない}}} \times \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{赤 4 個の入れ方}} + \underbrace{6 \cdot 2}_{\substack{\text{BB と B が}\\ \text{隣り合う}}} \times \underbrace{4}_{\substack{\text{BB と B の}\\ \text{間に入る赤が}\\ \text{4 通り}}} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)\\
&= 5! \times 6(6 \cdot 5 + 6) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5\\
&= 8! \times 6 \cdot 36 \cdot 5\\
&= 10! \times 12 \text{ 通り}
\end{aligned}
$$

ある．

(ii) 黒玉 3 個がすべて隣り合うとき

3 個連続して並ぶ黒玉を 1 つのカタマリとみなして，BBB と表すことにする．3 個の B はすべて区別しているから $3!$ 通りの並び方がある．まず白玉を 5 個並べ，そのすき間と両端の計 6 か所のうち 1 か所に，カタマリ BBB を入れる．そのあとに白玉 5 個とカタマリ BBB を並べた 6 個のすき間と両端の計 7 か所のうち 4 か所に，赤玉を 1 個ずつ入れる．このような並べ方となる玉の取り出し方は

$$5! \times 3! \cdot 6 \times 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 10! \text{ 通り}$$

ある．

したがって

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A) - P(A \cap \overline{B})\\
&= \frac{14}{55} - \frac{10!(12+1)}{12!} = \frac{14}{55} - \frac{13}{12 \cdot 11} = \frac{168 - 65}{5 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{103}{660}
\end{aligned}
$$

以下，解答と同じ．

- 同じ色の玉を区別しないで 12 個の玉を並べる並べ方は

$$\frac{12!}{3!4!5!} \text{ 通り}$$

あり，これらは同様に確からしい．

(1) 事象 A となる玉の並び方は，まず赤玉 4 個を除いた黒 3 個，白 5 個の 8 個を並べ，つぎにこの列の両端または間 9 か所に赤玉を 1 個ずつ入れる 4 か所を選べばよい．求める確率 p は

$$p = P(A) = \frac{\dfrac{8!}{3!5!} \times {}_9\mathrm{C}_4}{\dfrac{12!}{3!4!5!}} = \frac{\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{14}{55}$$

……(答)

である．

(2) 事象 $A \cap B$ の確率は

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$$

であり，$A \cap \overline{B}$ は赤玉は隣り合わないが，黒球は隣り合うという事象である．黒球が何個隣り合うかで場合分けする．

(i) 黒玉 3 個のうち隣り合う 2 個が存在するとき (3 個が連続するときも含む)

白玉 5 個と$\boxed{\mathrm{BB}}$，B の 7 個を並べてできる列の両端または間の 8 か所から赤玉を 1 個ずつ入れる 4 か所を選べばよいから

$$\frac{7!}{5!1!1!}\times {}_8\mathrm{C}_4 = 7\cdot 6\times\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 6\times 7\cdot 2\cdot 5 \text{ 通り}$$

(ii) 黒玉 3 個がすべて隣り合うとき

白玉 5 個と$\boxed{\mathrm{BBB}}$の 6 個を並べてできる列の両端または間の 7 か所から赤玉を 1 個ずつ入れる 4 か所を選べばよいから

$$\frac{6!}{5!1!}\times {}_7\mathrm{C}_4 = 6\times\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 6\cdot 5 \text{ 通り}$$

(i) では$\boxed{\mathrm{BB}}$B と B$\boxed{\mathrm{BB}}$を区別して数えており，どちらのタイプも 12 個並んだときの並べ方は $7\cdot 6\cdot 5$ 通りある．重複するものを除くと

$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= \frac{14}{55} - \frac{7\cdot 6\cdot 5(7\cdot 2-1)}{\frac{12!}{3!4!5!}}\\ &= \frac{14}{55} - \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 13}{11\cdot 10\cdot 9\cdot 4\cdot 7}\\ &= \frac{14}{55} - \frac{13}{11\cdot 12}\end{aligned}$$

求める確率は

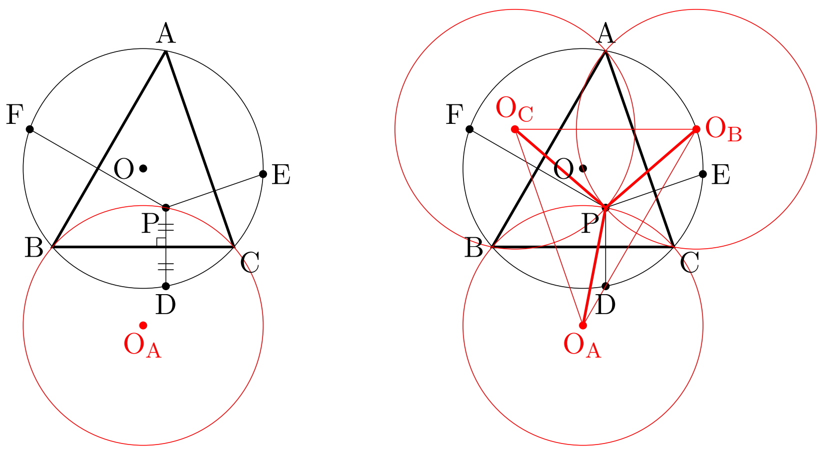
$$q = \frac{\frac{14}{55}-\frac{13}{11\cdot 12}}{\frac{14}{55}} = \frac{168-65}{5\cdot 11\cdot 12}\times\frac{55}{14} = \frac{103}{168}$$

である．

2 まず，条件を満たす点 P が存在すると仮定して，P の位置を絞る．

6 点 A，B，C，D，E，F が同一円周上にあるならば，その円は △ABC の外接円 O である．外接円 O の中心を O，半径を R とおく．

外接円 O を直線 BC に関して対称移動した円を O_{A}，その中心を $\mathrm{O_A}$ とおくと，△ABC の内部の点 P の直線 BC に関する対称点が D であるから，D が △ABC の外接円 O 上にあるということは，P が円 O_{A} 上にあるということである．



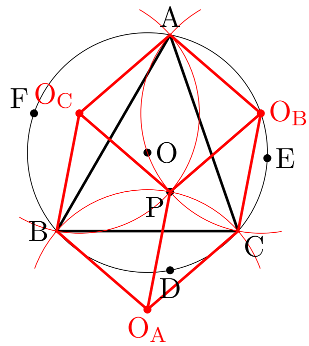
同じく，外接円 O を直線 CA，AB に関して対称移動した円をそれぞれ O_{B}，O_{C}，その中心をそれぞれ $\mathrm{O_B}$，$\mathrm{O_C}$ とおくと，P は円 O_{B}，O_{C} 上にある．3 つの円 O_{A}，O_{B}，O_{C} の半径はすべて R であるから，点 P は $\triangle\mathrm{O_AO_BO_C}$ の外心である．

したがって，条件を満たす P の個数は

$$0 \text{ または } 1$$

である．

つぎに，条件を満たす P の存在を確かめる．



$\triangle\mathrm{O_AO_BO_C}$ の外心を P とし，$\triangle$ABC との関係を調べる．

$$\begin{cases} \mathrm{O_AP} = \mathrm{O_AC} = R \\ \mathrm{O_BP} = \mathrm{O_BC} = R \end{cases}$$

より，四角形 $\mathrm{PO_ACO_B}$ は一辺の長さが R のひし形である．したがって，対角線 PC，$\mathrm{O_AO_B}$ は直交する．

$$\mathrm{PC} \perp \mathrm{O_AO_B} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

同じく，四角形 $\mathrm{PO_BAO_C}$，四角形 $\mathrm{PO_CBO_A}$ も一辺の長さが R のひし形である．したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{O_AO_B}} &= \overrightarrow{\mathrm{O_AP}} + \overrightarrow{\mathrm{PO_B}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{BO_C}} + \overrightarrow{\mathrm{O_CA}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{BA}} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathrm{O_AO_B} /\!/ \mathrm{BA} \qquad \cdots\cdots ②$$

① かつ ② より

$$\mathrm{PC} \perp \mathrm{AB}$$

同じく

$$\mathrm{PA} \perp \mathrm{BC} \quad (\mathrm{PB} \perp \mathrm{CA})$$

が成り立つ．

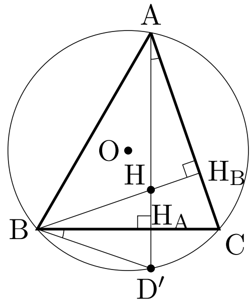
すなわち，P は $\triangle$ABC の垂心である．鋭角三角形の垂心は $\triangle$ABC の内部にあるから，P は条件を満たす．

よって，条件を満たす P は $\triangle$ABC の内部に

1 個 ……(答)

ある．

- 後半の P の存在確認で，P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心と予想できたときは，次のような解答も可能である．



　鋭角三角形 ABC の垂心 H は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部にある．線分 AH を延長し辺 BC との交点を $\mathrm{H_A}$，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円 O との交点を $\mathrm{D'}$，線分 BH を延長し辺 CA との交点を $\mathrm{H_B}$ とおく．

$$\angle\mathrm{D'BC} = \angle\mathrm{D'AC} \quad (\because \text{ 円周角の定理})$$

かつ $\triangle\mathrm{BH_AH} \backsim \triangle\mathrm{AH_BH}$ だから

$$\angle\mathrm{D'BC} = \angle\mathrm{HBH_A}$$

である．さらに，辺 $\mathrm{BH_A}$ が共通辺であるから

$$\triangle\mathrm{D'BH_A} \equiv \triangle\mathrm{HBH_A}$$

である．したがって

$$\mathrm{HH_A} = \mathrm{D'H_A} \text{ かつ } \mathrm{HH_A} \perp \mathrm{BC}$$

であり，$\mathrm{D'}$ は直線 BC に関して垂心 H と対称な点 D である．

　同様にして，BH の延長と外接円 O の交点を $\mathrm{E'}$，CH の延長と外接円 O の交点を $\mathrm{F'}$ とおくと，$\mathrm{E'}$ は直線 CA に関して垂心 H と対称な点 E，$\mathrm{F'}$ は直線 AB に関して垂心 H と対称な点 F である．

　よって，垂心 H は題意の点 P であり，求める点は 1 個ある．

【2 – 1】

(1) $\mathrm{AB} + \mathrm{CA} > \mathrm{BC}$ となる x の条件は

$$4x + (x^2 + 2x - 3) > x^2 + 3$$
$$6x > 6 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x > 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 点 A，B，C を頂点とする三角形が存在するための条件は

$$\begin{cases} \mathrm{AB} + \mathrm{CA} > \mathrm{BC} & \cdots\cdots ① \\ \mathrm{AB} + \mathrm{BC} > \mathrm{CA} & \cdots\cdots ② \\ \mathrm{BC} + \mathrm{CA} > \mathrm{AB} & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

である．

　① は (1) で済んでおり，$x > 1$ である．このとき

$$② : \mathrm{AB} + \mathrm{BC} - \mathrm{CA} = 4x + (x^2 + 3) - (x^2 + 2x - 3) = 2x + 6 > 0$$
$$③ : \mathrm{BC} + \mathrm{CA} - \mathrm{AB} = (x^2 + 3) + (x^2 + 2x - 3) - 4x = 2x(x - 1) > 0$$

が確認されるので，求める条件は

$$\boldsymbol{x > 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{A} &= \frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}}\\ &= \frac{(4x)^2+(x^2+2x-3)^2-(x^2+3)^2}{2(4x)(x^2+2x-3)}\\ &= \frac{(4x)^2+(2x^2+2x)(2x-6)}{2(4x)(x^2+2x-3)}\\ &= \frac{16x^2+4(x^3-2x^2-3x)}{2(4x)(x^2+2x-3)}\\ &= \frac{4x(x^2+2x-3)}{2(4x)(x^2+2x-3)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0<\angle\mathrm{A}<180^\circ$ より

$$\angle\mathrm{A}=\mathbf{60^\circ} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) (3) より，$\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=120^\circ$ となることに注意すると，$\angle\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{B}$, $\angle\mathrm{C}$ の大小は

(i) $\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{C}$
(ii) $\angle\mathrm{B}<\angle\mathrm{A}<\angle\mathrm{C}$
(iii) $\angle\mathrm{C}<\angle\mathrm{A}<\angle\mathrm{B}$

のいずれかである．$\angle\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{B}$, $\angle\mathrm{C}$ の大小は，対辺の長さ

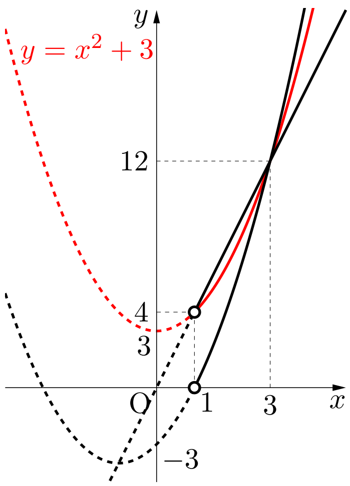
$$\mathrm{BC}=x^2+3,\ \mathrm{CA}=x^2+2x-3,\ \mathrm{AB}=4x$$

の大小と一致する．(i) となるのは

$$4x=x^2+3=x^2+2x-3$$
$$\iff \begin{cases}x^2-4x+3=0\\ 2x-6=0\end{cases}$$
$$\therefore\quad x=3$$

のときである．(2) より，$x>1$ であることに注意すると

$1<x<3$ のとき，$\mathrm{CA}<\mathrm{BC}<\mathrm{AB}$
$x=3$ のとき，$\mathrm{CA}=\mathrm{BC}=\mathrm{AB}$
$x>3$ のとき，$\mathrm{CA}<\mathrm{BC}<\mathrm{AB}$



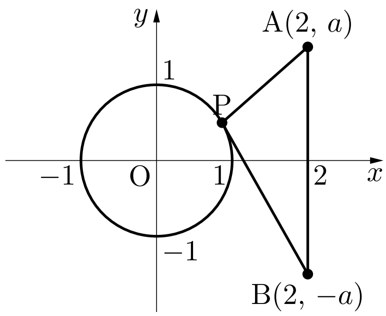
であるから，$\angle\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{B}$, $\angle\mathrm{C}$ の大小は

$$\begin{cases}\mathbf{1<x<3}\ \textbf{のとき} & \angle\mathbf{B}<\angle\mathbf{A}<\angle\mathbf{C}\\ \mathbf{x=3}\ \textbf{のとき} & \angle\mathbf{B}=\angle\mathbf{A}=\angle\mathbf{C}\\ \mathbf{3<x}\ \textbf{のとき} & \angle\mathbf{C}<\angle\mathbf{A}<\angle\mathbf{B}\end{cases} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

【2 – 2】

(1) 点 P は円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点であるから，P の座標 $(x,\ y)$ を



$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

と表すことができる．

2 点 A，B の座標はそれぞれ $(2,\ a)$，$(2,\ -a)$ であり，点 G は △APB の重心であるから，G の座標 $(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} x=\dfrac{2+2+\cos\theta}{3} \\ y=\dfrac{a+(-a)+\sin\theta}{3} \end{cases}$$

$$\therefore\quad (*)\begin{cases} x=\dfrac{4+\cos\theta}{3} \\ y=\dfrac{\sin\theta}{3} \end{cases}$$

である．G の軌跡は $(*)$ をみたす θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合であり

$$(*) \iff \begin{cases} \cos\theta=3x-4 \\ \sin\theta=3y \end{cases}$$

であるから，求める x，y の条件は

$$(3x-4)^2+(3y)^2=1$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

である．すなわち，G の軌跡は

中心 $\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{3},\ 0}\right)$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ の円 ……（答）

である．

(2) △APB の外心 Q は辺 AB，AP それぞれの垂直二等分線の交点である．辺 AB の垂直二等分線は x 軸

$$y=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

であり，辺 AP の垂直二等分線は AQ = PQ より

$$(x-2)^2+(y-a)^2=(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2$$

$$-4x-2ay+4+a^2=-2x\cos\theta-2y\sin\theta+1$$

$$\therefore\quad (4-2\cos\theta)x+(2a-2\sin\theta)y=a^2+3 \qquad \cdots\cdots ②$$

Q の軌跡は「①かつ②」をみたす θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合であり

$$「①かつ②」 \iff \begin{cases} y=0 \\ (4-2\cos\theta)x=a^2+3 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ 2x\cos\theta=4x-a^2-3 \end{cases}$$

第 2 式において $x \fallingdotseq 0$ が確認されるから，求める x，y の条件は

$$\begin{cases} y = 0 \\ -1 \leqq \dfrac{4x - a^2 - 3}{2x} \leqq 1 \end{cases}$$

である．第 2 式を整理すると

$$\begin{cases} x > 0 \\ -1 \leqq \dfrac{4x - a^2 - 3}{2x} \leqq 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -1 \leqq \dfrac{4x - a^2 - 3}{2x} \leqq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ -2x \leqq 4x - a^2 - 3 \leqq 2x \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -2x \geqq 4x - a^2 - 3 \geqq 2x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ a^2 + 3 \leqq 6x \\ 2x \leqq a^2 + 3 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x < 0 \\ a^2 + 3 \geqq 6x \\ 2x \geqq a^2 + 3 \text{ (これをみたす } x \text{ は存在しない)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{a^2 + 3}{6} \leqq x \leqq \dfrac{a^2 + 3}{2} \end{cases}$$

$$\iff \frac{a^2 + 3}{6} \leqq x \leqq \frac{a^2 + 3}{2}$$

となる．以上より，Q の軌跡は

線分 $\boldsymbol{y = 0} \ \left(\dfrac{\boldsymbol{a^2 + 3}}{\boldsymbol{6}} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \dfrac{\boldsymbol{a^2 + 3}}{\boldsymbol{2}} \right)$ ……(答)

である．

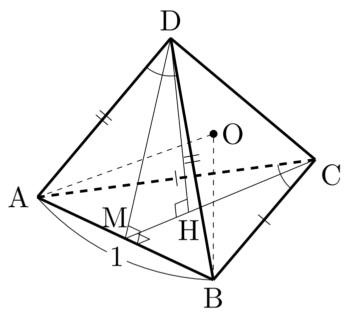
3

(1) $\triangle$ABC は AC $=$ BC の二等辺三角形である．AC $=$ BC $= x$ とおくと，AB $= 1$，$\cos \angle \mathrm{ACB} = \dfrac{4}{5}$ であるから，余弦定理により

$$x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \frac{4}{5} = 1$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{5}{2}$$

である．



$$\sin \angle \mathrm{ACB} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

となるので，$\triangle$ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BC} \cdot \sin \angle \mathrm{ACB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{5} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$ ……(答)

である．

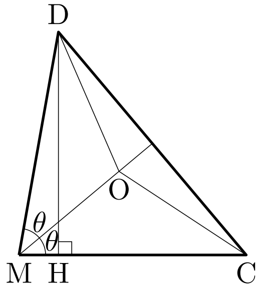
(2) $\mathrm{AC}=\mathrm{BC},\ \mathrm{AD}=\mathrm{BD}$ であるから，辺 AB の中点を M とおくと

$$\mathrm{DM}\perp\mathrm{AB},\ \mathrm{CM}\perp\mathrm{AB}$$

である．D から直線 CM 下した垂線の足を H とおくと，三垂線の定理より

$$\mathrm{DH}\perp(\text{平面 ABC})$$

である．



また，A，B は半径 1 の球面上の点であるから，球面の中心を O とおくと，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}(=1)$ である．3 点 O, C, D は線分 AB の垂直二等分面上にある．

平面 CMD による切り口を考える．

$$\mathrm{MC}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$$

である．また，$\triangle\mathrm{ABD}\equiv\triangle\mathrm{ABC}$ より

$$\mathrm{MD}=\frac{3}{2}$$

でもあり

$$\triangle\mathrm{OMC}\equiv\triangle\mathrm{OMD}\quad(\because\ \text{三辺相等})$$

$\angle\mathrm{OMC}=\theta$ とおくと

$$\mathrm{DH}=\mathrm{DM}\sin 2\theta=3\sin\theta\cos\theta$$

である．

$\mathrm{AB}=1$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ は一辺の長さが 1 の正三角形であり

$$\mathrm{OM}=1\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．また，$\triangle\mathrm{OMC}$ において余弦定理を用いると

$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1^2}{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

となる．よって

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}$$

である．

よって，四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(3\cdot\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{9}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 次のようにしてもよい．

  $\triangle\mathrm{MCD} \perp \mathrm{AB}$ より，求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned}2\times\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{MCD}\cdot\mathrm{AM} &= 2\times\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\mathrm{MD}\cdot\mathrm{MC}\sin 2\theta\right)\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{3\sqrt{3}}\\ &= \frac{\sqrt{11}}{9}\end{aligned}$$

  である．

【3 – 1】

(1) 一つの頂点を共有する正三角形，正方形の面の個数をそれぞれ a, b とする．
条件 (b)「合同な 2 つの面は辺を共有しない」より

$$a = b \geqq 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．一つの頂点に集まる面の内角の和は

$$\frac{\pi}{3}a + \frac{\pi}{2}b < 2\pi$$

$$\therefore\quad 2a + 3b < 12 \qquad \cdots\cdots ②$$

① かつ ② より

$$2 \leqq a = b < \frac{12}{5} \qquad \therefore\quad a = b = 2$$

であり，一つの頂点を共有する面の数は

$$a + b = 2 + 2 = \mathbf{4} \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

である．

(2) 多面体の面である正三角形 (equilateral triangle)，正方形 (square) の数をそれぞれ t, s とおく．多面体の頂点 (vertex)，辺 (edge)，面 (face) の数をそれぞれ v, e, f とおくと

$$v - e + f = 2 \quad (\text{オイラーの多面体定理})$$

が成り立つから

$$\frac{3t+4s}{4} - \frac{3t+4s}{2} + (t+s) = 2$$

$$\therefore\quad t = 8$$

また，正三角形と正方形の面は一つの辺を共有しているから，$3t = 4s$ の関係が成り立つから

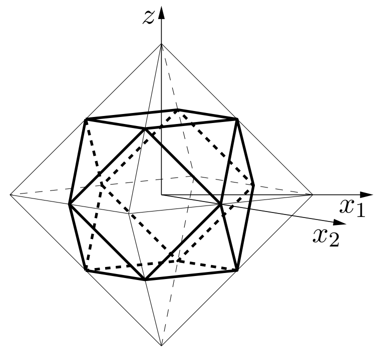
$$\therefore\quad s = \frac{3}{4}t = \frac{3}{4}\times 8 = 6$$

以上より

正三角形の面の数は 8，正方形の面の数は 6 ……(答)

である．

(3) 正八面体の各頂点に集まる4つの辺の中点を通る平面は6個あり，これら6個の平面で切断すれば条件を満たす立体ができる． ……(証明終わり)



(4) 凸多面体 F は1辺の長さが2の正八面体 (regular octahedron)E を (3) の切断を行うことにより得られ，F のすべての正三角形の面に接する球 B は E の内接球である．

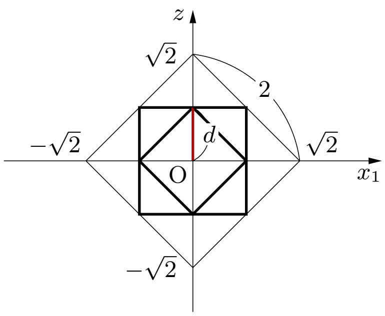
凸多面体 F の中心から正方形の面までの距離 d は

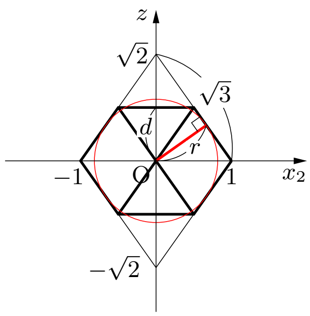
$$d = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

正三角形の面までの距離 r は球 B の半径であり，右図の直角三角形の面積を2通り考えると

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}r = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2} \qquad \therefore \quad r = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

である．





$d < r$ より球 B は F の正方形の面からはみ出す．それら6つのはみ出した図形の体積の和 V' は

$$\begin{aligned}
V' &= 6\times\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(\frac{2}{3} - z^2\right)\,dz = 6\pi\left[\frac{2}{3}z - \frac{z^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\\
&= 2\pi\left\{\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right\}\\
&= \left(\frac{8}{9}\sqrt{6} - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\pi
\end{aligned}$$

よって，共通部分の体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 - V'\\
&= \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - \left(\frac{8}{9}\sqrt{6} - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\pi\\
&= \boldsymbol{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{16}{27}\sqrt{6}\right)\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

4 $$f(x)=x^3+5x^2-3x-9$$

(1) $$f'(x)=3x^2+10x-3$$

より，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2+10t-3)(x-t)+t^3+5t^2-3t-9$$
$$\therefore\quad y=(3t^2+10t-3)x-2t^3-5t^2-9$$

であり，この接線が点 $(-3,\ 0)$ を通るから

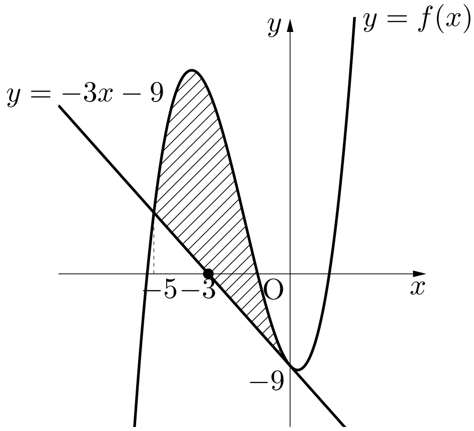
$$0=(3t^2+10t-3)\cdot(-3)-2t^3-5t^2-9$$
$$0=-2t^3-14t^2-30t$$
$$\therefore\quad 2t(t^2+7t+15)=0$$

$t^2+7t+15=\left(t+\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$ より，これを満たす実数 t は $t=0$ だけであり，接線の方程式は

$$y=-3x-9$$

である．曲線 $y=f(x)$ と接線 $y=-3x-9$ の共有点の x 座標は

$$x^3+5x^2-3x-9=-3x-9$$
$$\therefore\quad x^2(x+5)=0$$
$$\therefore\quad x=-5,\ 0\ (\text{重解})$$



$-5<x<0$ のとき，$x^2(x+5)>0$ であるから，求める面積は

$$\int_{-5}^{0}\{f(x)-(-3x-9)\}\,dx$$
$$=\int_{-5}^{0}(x^3+5x^2)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3\right]_{-5}^{0}=-5^4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{625}{12}}$$ ……(答)

である．

(2) 2 点 $(-3,\ 0)$, $(-1,\ f(-1))$ を通る直線の傾きは

$$\frac{f(-1)-0}{-1-(-3)}=\frac{-2}{2}=-1$$

であるから，その方程式は

$$y=-(x+3)$$

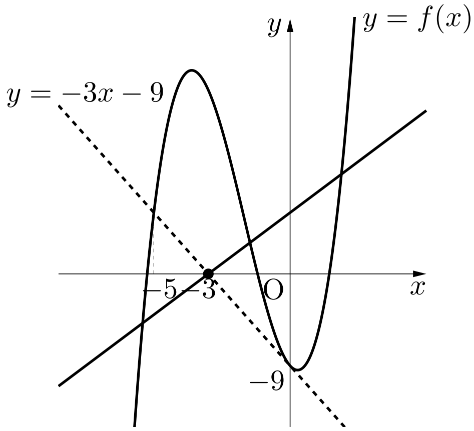
である．直線 $y=-x-3$ と曲線 $y=f(x)$ のすべての交点の x 座標は，方程式

$f(x)=-(x+3)$ の実数解であるから

$$x^3+5x^2-3x-9=-x-3$$
$$x^3+5x^2-2x-6=0$$
$$(x+1)(x^2+4x-6)$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{x=-1,\ -2\pm\sqrt{10}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 右図より，方程式 $f(x)=m(x+3)$ の 3 つの相異なる解の一つは $-3<x<0$ にあり，それが整数解となるのは $x=-2,\ -1$ のいずれかである．



$x=-1$ のとき (2) より整数解は 1 個のみであり，不適．

したがって，解が 3 つとも整数となる可能性があるのは $x=-2$ がその方程式の解の一つとなるときである．そのとき

$$f(-2)=m(-2+3)$$

であり

$$\begin{aligned} m&=f(-2)\\ &=-8+20+6-9\\ &=9 \end{aligned}$$

である．方程式 $f(x)=9(x+3)$ を解くと

$$x^3+5x^2-3x-9=9x+27$$
$$x^3+5x^2-12x-36=0$$
$$\therefore\quad (x+2)(x+6)(x-3)=0$$
$$\therefore\quad x=-6,\ -2,\ 3$$

として，3 つの相異なる整数解をもつ．

よって，求める m の値は

$$\boldsymbol{m=9} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

【4 – 1】 $C: y=x^3-x^2-2x+1,$

$l: y=-x+k$

(1) $k=1$ のとき，C と l の 3 つの共有点の x 座標は

$$x^3-x^2-2x+1=-x+1$$
$$x^3-x^2-x=0$$
$$\therefore\quad x(x^2-x-1)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

の実数解である．$x^2-x-1=0$ の 2 解は，解と係数の関係より (2 解の積) $=-1$ であるから，異符号である．したがって，① は 0，負，正の 3 つ解をもち，負の解が α，正の解が β であり，α, β は

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-1\end{cases} \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす．② より

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-1)=\mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot(-1)\cdot 1=\mathbf{4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) C と l が 2 個以上の相異なる共有点をもつ条件は，方程式

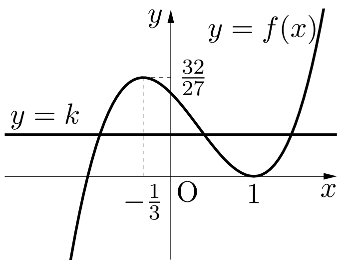
$$x^3-x^2-2x+1=-x+k$$
$$\therefore\quad x^3-x^2-x+1=k$$

が 2 個以上の相異なる実数解をもつことである．これは $f(x)=x^3-x^2-x+1$ とおくと，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ が 2 個以上の相異なる共有点をもつことである．

$$f'(x)=3x^2-2x-1$$
$$=(3x+1)(x-1)$$

$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



右のグラフより，k の値の範囲は

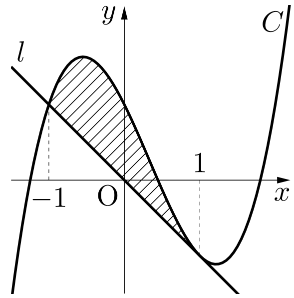
$$\mathbf{0 \leqq k \leqq \frac{32}{27}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (2) の範囲の k，すなわち $0\leqq k\leqq \dfrac{32}{27}$ の範囲の k を固定し，C と l で囲まれる部分の面積 S_k を計算してみる．

(i) $k=0$ のとき

$$x^3-x^2-2x+1=-x+0$$
$$x^3-x^2-x+1=0$$
$$(x+1)(x-1)^2=0$$
$$\therefore\quad x=-1,\ 1\ (重解)$$



であり

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \int_{-1}^{1} \{f(x) - (-x)\}\, dx = \int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)^2\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \{(x-1+2)(x-1)^2\}\, dx = \left[\frac{(x-1)^4}{4} + 2\frac{(x-1)^3}{3} \right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{(-2)^4}{4} - 2\frac{(-2)^3}{3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

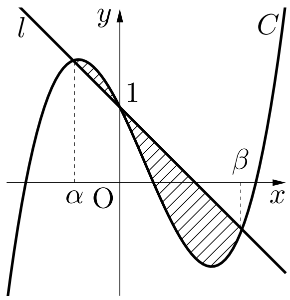
である．

- 偶関数・奇関数に着目して積分すると

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \int_{-1}^{1} \{f(x) - (-x)\}\, dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 - x + 1)\, dx \\
&= 2\int_{0}^{1} (-x^2 + 1)\, dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{0}^{1} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

である．

(ii) $k = 1$ のとき



$$
\begin{aligned}
&x^3 - x^2 - 2x + 1 = -x + 1 \\
&x^3 - x^2 - x = 0 \\
&x(x-\alpha)(x-\beta) = 0
\end{aligned}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_{\alpha}^{0} \{f(x) - (-x+1)\}\, dx \\
&\qquad + \int_{0}^{\beta} \{(-x+1) - f(x)\}\, dx \\
&= \int_{\alpha}^{0} (x^3 - x^2 - x)\, dx - \int_{0}^{\beta} (x^3 - x^2 - x)\, dx \\
&= -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{\alpha} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{\beta} \\
&= -\frac{\alpha^4 + \beta^4}{4} + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{3} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}
\end{aligned}
$$

ここで，②と (1) より

$$
\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 3^2 - 2 \cdot (-1)^2 = 7
$$

であるから

$$
S_1 = -\frac{7}{4} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{12}
$$

である．

(i)(ii) から，$S_0 \neq S_1$ であり，生徒が予想した命題は偽である．

…… (証明終わり)