令 和 5 年 度 特 色 入 試 問 題

《 理 学 部（数理科学入試）》

数学に関する能力測定考査

80 点 満 点

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと．
2. 問題は全部で 4 題ある（1 ページから 4 ページ）．
3. 解答冊子は問題ごとに 1 冊ずつある（全部で 4 冊ある）．それぞれの解答冊子は表紙のほかに 8 ページある．
4. 試験開始後，それぞれの解答冊子の表紙所定欄に受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題ごとに指定された解答冊子の解答用ページに書くこと．ただし，続き方をはっきり示して同じ解答冊子の計算用ページに解答の続きを書いてもよい．この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．それ以外の場合，計算用ページは採点の対象としない．
6. 解答のための下書き，計算などは，計算用ページに書いてもよい．
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．
8. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1 (20 点)

平面内の鋭角三角形 △ABC を考える．△ABC の内部の点 P に対して，

直線 BC に関して P と対称な点を D,

直線 CA に関して P と対称な点を E,

直線 AB に関して P と対称な点を F

とする．6 点 A, B, C, D, E, F が同一円周上にあるような P は △ABC の内部にいくつあるか求めよ．

$\boxed{2}$ (20 点)

2つの整数 m と n が $0 < m < n$ を満たすとする．また，関数 $H(x)$ を

$$H(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x) \qquad (0 < x < 1)$$

と定める．ただし，log は自然対数を表す．また，e を自然対数の底とする．以下の設問に答えよ．

(1) ${}_nC_m \leqq e^{nH\left(\frac{m}{n}\right)}$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq k \leqq n$ を満たす任意の整数 k に対して

$${}_nC_k\left(\frac{m}{n}\right)^k\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} \leqq {}_nC_m\left(\frac{m}{n}\right)^m\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-m}$$

が成り立つことを示せ．

(3) ${}_nC_m \geqq \dfrac{1}{n+1}e^{nH\left(\frac{m}{n}\right)}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{3}$ (20 点)

複素数の数列 $\{z_n\}$ に対する次の 2 つの条件を考える．

(i) すべての自然数 n に対して，$|z_n - z_{n+1}| = 2^n$ が成り立つ．

(ii) すべての自然数 n に対して，

$$\frac{(z_n - z_{n+1})(z_{n+2} - z_{n+3})}{(z_{n+1} - z_{n+2})(z_{n+3} - z_n)}$$

は実数である．

複素数の数列 $\{z_n\}$ で (i) と (ii) をともに満たすものをすべて考えたとき，

$$\frac{z_{2022} - z_{2023}}{z_{2023} - z_{2024}}$$

がとり得る値をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ (20 点)

p を 3 以上の素数とし, a を整数とする. このとき, p^2 以上の整数 n であって

$$ {}_nC_{p^2} \equiv a \pmod{p^3} $$

を満たすものが存在することを示せ.

問題は，このページで終わりである.