1

(35 点)

次の各問に答えよ.

問 1　定積分$\int_1^4 \sqrt{x}\,\log(x^2)\,dx$の値を求めよ.

問 2　整式$x^{2023}-1$を整式$x^4+x^3+x^2+x+1$で割ったときの余りを求めよ.

2

(30 点)

空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 点 D, P, Q を次のように定める. 点 D は $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$ を満たし, 点 P は線分 OA を 1 : 2 に内分し, 点 Q は線分 OB の中点である. さらに, 直線 OD 上の点 R を, 直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める. このとき, 線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 OR : RD を求めよ.

3

(30 点)

n を自然数とする. 1 個のさいころを n 回投げ, 出た目を順に X_1, X_2, ……, X_n とし, n 個の数の積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ を Y とする.

(1)　Y が 5 で割り切れる確率を求めよ.

(2)　Y が 15 で割り切れる確率を求めよ.

4

(35 点)

次の関数$f(x)$の最大値と最小値を求めよ.

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1+\frac{1}{e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

ただし，eは自然対数の底であり，その値は$e=2.71\cdots\cdots$である.

5

(35 点)

Oを原点とするxyz空間において，点Pと点Qは次の3つの条件(a)，(b)，(c)を満たしている.

(a) 点Pはx軸上にある.

(b) 点Qはyz平面上にある.

(c) 線分OPと線分OQの長さの和は1である.

点Pと点Qが条件(a)，(b)，(c)を満たしながらくまなく動くとき，線分PQが通過してできる立体の体積を求めよ.

6

(35 点)

pを3以上の素数とする．また，θを実数とする.

(1) $\cos 3\theta$と$\cos 4\theta$を$\cos\theta$の式として表せ.

(2) $\cos\theta=\frac{1}{p}$のとき，$\theta=\frac{m}{n}\cdot\pi$となるような正の整数$m$，$n$が存在するか否かを理由を付けて判定せよ.

問題は，このページで終わりである。