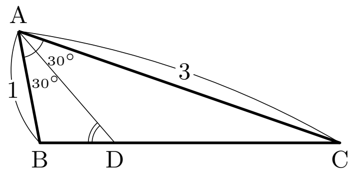
$\triangle$ABC において，AB $=1$, AC $=3$, $\angle$BAC $=60^\circ$ とし，$\angle$BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 BD の長さを求めよ．また，$\sin\angle$ADB の値を求めよ．

(23 山梨大 教 1(2))

【答】 $\mathrm{BD}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，$\sin\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

【解答】

余弦定理より



$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= 1^2+3^2-2\cdot1\cdot3\cdot\cos60^\circ\\ &= 1+9-3\\ &= 7\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathrm{BC}=\sqrt{7}$$

AD は $\angle$BAC の二等分線なので

$$\mathrm{BD}:\mathrm{CD}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=1:3$$

である．したがって

$$\mathrm{BD}=\frac{1}{1+3}\mathrm{BC}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

また，$\triangle$ABD において正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ADB}}=\frac{\mathrm{BD}}{\sin\angle\mathrm{BAD}}$$

$$\frac{1}{\sin\angle\mathrm{ADB}}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\sin30^\circ}$$

$$\therefore\quad \sin\angle\mathrm{ADB}=\frac{4}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{7}}{7}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．