$0 < x < y$ とする．平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを x，辺 BC の長さを y，$\angle\mathrm{ABC} = 2\theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．平行四辺形 ABCD の内角 A，B，C，D を 2 等分する直線をそれぞれ ℓ_{A}，ℓ_{B}，ℓ_{C}，ℓ_{D} とし，ℓ_{A} と ℓ_{B} の交点を E，ℓ_{B} と ℓ_{C} の交点を F，ℓ_{C} と ℓ_{D} の交点を G，ℓ_{D} と ℓ_{A} の交点を H とする．平行四辺形 ABCD と四角形 EFGH が重なる部分の面積を S とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{FEH}$ を求めよ．
(2) 線分 AE および線分 AH の長さを求めよ．
(3) 点 H が平行四辺形 ABCD の外部にあるような，x，y の条件を求めよ．
(4) S を求めよ．

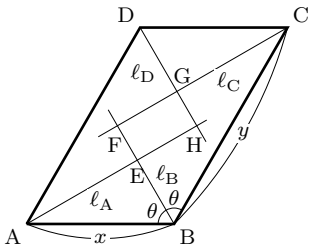
(23 岡山大 理系 4)

【答】

(1) $\angle\mathrm{FEH} = \dfrac{\pi}{2}$
(2) $\mathrm{AE} = x\sin\theta$，$\mathrm{AH} = y\sin\theta$
(3) $y > 2x$
(4) $S = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(y-x)^2\sin 2\theta & (0 < y \leqq 2x \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}(2y-3x)x\sin 2\theta & (y > 2x \text{ のとき}) \end{cases}$

【解答】

(1) 四角形 ABCD の内角の和は 2π であり，平行四辺形だから 2 組の対角がそれぞれ等しい．



$$\angle\mathrm{BAD} = \frac{1}{2}(2\pi - 4\theta) = \pi - 2\theta$$

ℓ_{A} は内角 A の二等分線であるから

$$\angle\mathrm{BAE} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

である．よって

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{FEH} = \angle\mathrm{AEB} &= \pi - (\angle\mathrm{EAB} + \angle\mathrm{EBA}) \\ &= \pi - \left\{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \theta\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(2) $\triangle\mathrm{ABE}$ は $\angle\mathrm{AEB} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから

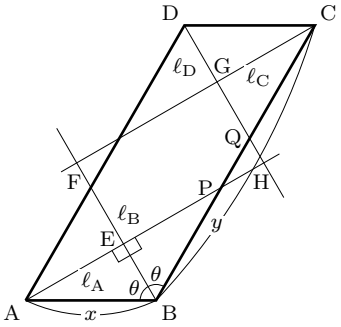
$$\mathrm{AE} = \mathrm{AB}\sin\theta = \boldsymbol{x\sin\theta}$$ ……(答)

である．

(1) と同様にして，$\triangle\mathrm{ADH}$ は $\angle\mathrm{AHD} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AD}\sin\theta = \boldsymbol{y\sin\theta}$$ ……(答)

である．



(3) ℓ_{A} と辺 BC との交点を P とすると，H が平行四辺形 ABCD の外部にある条件は

$$\mathrm{AH} > \mathrm{AP} \iff y\sin\theta > 2\cdot x\sin\theta$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta > 0$ なので，求める条件は

$$\boldsymbol{y > 2x} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) (1)，(2) と同様にして

$$\angle\mathrm{FGH} = \angle\mathrm{EFG} = \frac{\pi}{2}$$

であるから，四辺形 EFGH は長方形である．$0 < x < y$ であり

$$\mathrm{EH} = \mathrm{AH} - \mathrm{AE} = (y-x)\sin\theta$$

また，(2) と同様にして

$$\mathrm{EF} = \mathrm{BF} - \mathrm{BE} = (y-x)\cos\theta$$

を得る．

H が平行四辺形の内部にあるときと外部にあるときで場合分けする．

(i) $0 < y \leqq 2x$ のとき

点 H は平行四辺形の内部または周上にあるから

$$S = \mathrm{EH}\cdot\mathrm{EF} = (y-x)^2\sin\theta\cos\theta$$

である．

(ii) $y > 2x$ のとき

点 H は平行四辺形の外部にある．ℓ_{D} と辺 BC との交点を Q とすると

$$\mathrm{BP} = \mathrm{CQ} = x \qquad \therefore \quad \mathrm{PQ} = y - 2x$$

であり，$\mathrm{PH} = (y-2x)\sin\theta$，$\mathrm{QH} = (y-2x)\cos\theta$ より，$\triangle\mathrm{HPQ}$ の面積は

$$\frac{1}{2}(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta$$

である．図形の対称性も考えると

$$\begin{aligned} S &= (\text{長方形 EFGH の面積}) - 2(\triangle\mathrm{HPQ}\text{ の面積}) \\ &= (y-x)^2\sin\theta\cos\theta - 2\times\frac{1}{2}(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta \\ &= (2y-3x)x\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

である．

以上 (i)，(ii) より

$$\boldsymbol{S = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(y-x)^2\sin 2\theta & (0 < y \leqq 2x \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}(2y-3x)x\sin 2\theta & (y > 2x \text{ のとき}) \end{cases}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．