点 O を中心とし，半径が 5 である円 O がある．この円周上に 2 点 A，B を AB = 6 となるようにとる．また，円 O の円周上に，2 点 A，B とは異なる点 C をとる．

(i) $\sin\angle\mathrm{ACB} = \boxed{\text{ア}}$ である．また，点 C を ∠ACB が鈍角となるようにとるとき，$\cos\angle\mathrm{ACB} = \boxed{\text{イ}}$ である．

(ii) 点 O を ∠ACB が鈍角で BC = 5 となるようにとる．このとき，

$\mathrm{AC} = \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}} - \boxed{\text{オ}}$ である．

(iii) 点 C を △ABC の面積が最大となるようにとる．点 C から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を D とするとき，$\tan\angle\mathrm{OAD} = \boxed{\text{カ}}$ である．また，△ABC の面積は $\boxed{\text{キク}}$ である．

(iv) 点 C を，(iii) と同様に，△ABC の面積が最大となるようにとる．このとき，

$\tan\angle\mathrm{ACB} = \boxed{\text{ケ}}$ である．

さらに，点 C を通り直線 AC に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を E とする．このとき，$\sin\angle\mathrm{BCE} = \boxed{\text{コ}}$ である．

点 F を線分 CE 上にとるとき，BF の長さの最小値は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい.）

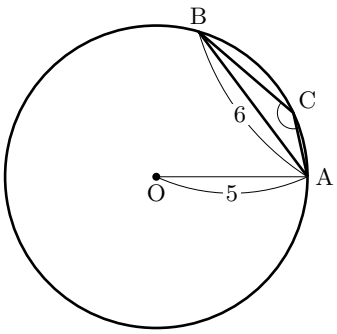
⓪ $\frac{3}{5}$	① $\frac{3}{4}$	② $\frac{4}{5}$	③ 1	④ $\frac{4}{3}$
⑤ $-\frac{3}{5}$	⑥ $-\frac{3}{4}$	⑦ $-\frac{4}{5}$	⑧ -1	⑨ $-\frac{4}{3}$

(23 共通テスト 本試験 I 2(1))

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キク	ケ	コ	サシ	スセ	ソ
0	7	3	3	4	4	27	1	2	12	10	5

【解答】



(i) △ABC において正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = 2\times 5$$

$$\therefore\quad \sin\angle\mathrm{ACB} = \frac{6}{2\times 5} = \boldsymbol{\frac{3}{5}} \quad ⓪ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，点 C を ∠ACB が鈍角となるようにとるとき

$$\cos\angle\mathrm{ACB} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \boldsymbol{-\frac{4}{5}} \quad ⑦ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) △ABC において余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ACB} \\ 6^2 &= \mathrm{AC}^2 + 5^2 - 2\mathrm{AC}\cdot 5\left(-\frac{4}{5}\right) \\ \mathrm{AC}^2 &+ 8\mathrm{AC} - 11 = 0 \\ \therefore\quad \mathrm{AC} &= -4 \pm \sqrt{27} = -4 \pm 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\mathrm{AC} > 0$ より

$$\mathrm{AC} = \boldsymbol{3\sqrt{3} - 4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

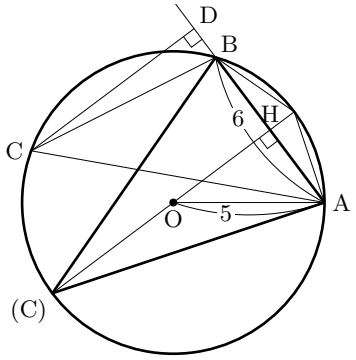
(iii) 中心 O から線分 AB に下ろした垂線の足を H とおく．△ABC の面積が最大となるのは，D が H と一致するときであり，それは C，O，D(= H) がこの順に一直線上に並ぶときである．

このとき，$\mathrm{AH} = 3$ であるから

$$\mathrm{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

であり

$$\begin{aligned} \tan\angle\mathrm{OAD} &= \tan\angle\mathrm{OAH} \\ &= \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{AH}} = \boldsymbol{\frac{4}{3}} \qquad ④ \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$



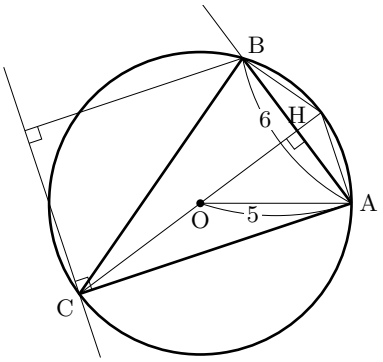
である．また，このときの △ABC の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CH} &= \frac{1}{2}\times 6\times(5+4) \\ &= \boldsymbol{27} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(iv) △ABC の面積が最大となるとき，△ABC は $\mathrm{CA} = \mathrm{CB}$ の二等辺三角形であり

$$\begin{aligned} \mathrm{CA} &= \mathrm{CB} \\ &= \sqrt{3^2 + (5+4)^2} \\ &= 3\sqrt{10} \end{aligned}$$



である．△ABC において余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} \cos\angle\mathrm{ACB} &= \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}} \\ &= \frac{90 + 90 - 36}{2\cdot 3\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}} \\ &= \frac{144}{2\cdot 90} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2\angle\mathrm{ACB} &= \frac{1}{\cos^2\angle\mathrm{ACB}} \\ \therefore\quad \tan^2\angle\mathrm{ACB} &= \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} - 1 = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$0^\circ < \angle\mathrm{ACB} < 90^\circ$ より

$$\tan\angle\mathrm{ACB} = \boldsymbol{\frac{3}{4}} \quad ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

さらに，点 C を通り直線 AC に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を E とすると

$$\sin\angle\mathrm{BCE} = \sin(90^\circ - \angle\mathrm{ACB}) = \cos\angle\mathrm{ACB} = \boldsymbol{\frac{4}{5}} \quad ② \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

点 F を線分 CE 上にとるとき，BF の長さが最小となるのは BF が CE の垂線となるときであるから，BF の最小値は

$$\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{BCF} = \mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{BCE} = 3\sqrt{10}\cdot\frac{4}{5} = \boldsymbol{\frac{12\sqrt{10}}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．