$\triangle$ABC において BC $= 1$ であるとする．$\sin\angle$ABC と $\sin\angle$ACB に関する条件が与えられたときの $\triangle$ABC の辺，角，面積について考察する．

(1) $\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であるとき，$\cos\angle\mathrm{ABC} = \pm\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である．

(2) $\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$ であるとする．

(i) このとき，AC $= \boxed{ス}$AB である．

(ii) この条件を満たす三角形は二つあり，その中で面積が大きい方の $\triangle$ABC においては，$\mathrm{AB} = \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である．

(3) $\sin\angle\mathrm{ABC} = 2\sin\angle\mathrm{ACB}$ を満たす $\triangle$ABC のうち，面積 S が最大となるものを求めよう．

$\sin\angle\mathrm{ABC} = 2\sin\angle\mathrm{ACB}$ と BC $= 1$ により

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\boxed{タ} - \boxed{チ}\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AB}}$$

である．$\triangle$ABC の面積 S について調べるために，S^2 を考える．$\mathrm{AB}^2 = x$ とおくと

$$S^2 = -\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テト}}x^2 + \frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}x - \frac{1}{16}$$

と表すことができる．したがって，S^2 が最大となるのは $x = \dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ のとき，すなわち $\mathrm{AB} = \dfrac{\sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$ のときである．$S > 0$ より，このときに面積 S も最大となる．

また，面積 S が最大となる $\triangle$ABC において，$\angle$ABC は $\boxed{ヒ}$ で，$\angle$ACB は $\boxed{フ}$ である．

$\boxed{ヒ}$，$\boxed{フ}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

⓪ 鋭角	① 直角	② 鈍角

(23 共通テスト 追・再 I 2〔2〕· IA 1〔2〕)

【答】

サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ
1	4	2	2	3	1	3	9	16	5	8	5	9	5	3	2	0

【解答】

(1) $\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であるとき，

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{16-15}}{4} = \pm\boldsymbol{\frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

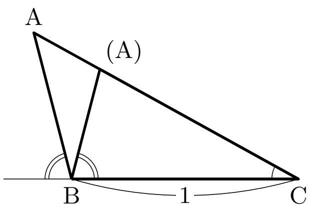
(2) $\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$ である．

(i) 正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$$
$$\frac{\mathrm{AC}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{\mathrm{AB}}{\frac{\sqrt{15}}{8}}$$
$$\therefore\quad \mathrm{AC} = \mathbf{2}\mathrm{AB} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) この条件を満たす三角形は右図のように二つあり，その中で面積が大きい方の $\triangle\mathrm{ABC}$ は $\cos\angle\mathrm{ABC} = -\dfrac{1}{4}$ となる三角形である．この $\triangle\mathrm{ABC}$ において余弦定理を用いる．$\mathrm{AC} = 2\mathrm{AB}$，$\mathrm{BC} = 1$ であるから



$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$4\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AB}^2 + 1^2 - 2\mathrm{AB}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$3\mathrm{AB}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{AB} - 1 = 0$$
$$6\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AB} - 2 = 0$$
$$(3\mathrm{AB}-2)(2\mathrm{AB}+1) = 0$$

$\mathrm{AB} > 0$ であるから

$$\mathrm{AB} = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $\sin\angle\mathrm{ABC} = 2\sin\angle\mathrm{ACB}$ と $\mathrm{BC} = 1$ である．
正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$$
$$\frac{\mathrm{AC}}{2\sin\angle\mathrm{ACB}} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$$
$$\therefore\quad \mathrm{AC} = 2\mathrm{AB}$$

余弦定理を用いると

$$4\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AB}^2 + 1^2 - 2\mathrm{AB}\cdot 1\cdot\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$3\mathrm{AB}^2 = 1 - 2\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$\therefore\quad \cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\mathbf{1}-\mathbf{3}\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AB}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$\mathrm{AB}^2 = x$ とおくと，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S の 2 乗は

$$\begin{aligned} S^2 &= \left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot 1\cdot \sin\angle\mathrm{ABC}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2(1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}) \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2\left\{1-\frac{(1-3\mathrm{AB}^2)^2}{4\mathrm{AB}^2}\right\} \quad (\because \text{①}) \\ &= \frac{1}{4}x\left\{1-\frac{(1-3x)^2}{4x}\right\} \\ &= \frac{1}{4}x\cdot\frac{-9x^2+10x-1}{4x} \\ &= -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}x^2+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}x-\frac{1}{16} \end{aligned}$$ ……(答)

と表すことができる．

$$\begin{aligned} S^2 &= -\frac{9}{16}\left(x-\frac{5}{9}\right)^2+\frac{5^2}{16\cdot 9}-\frac{1}{16} \\ &= -\frac{9}{16}\left(x-\frac{5}{9}\right)^2+\frac{1}{9} \end{aligned}$$

となるから，S^2 が最大となるのは

$x = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$ のとき，すなわち $\mathrm{AB} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{3}}$ のときである． ……(答)

$S > 0$ より，このときに面積 S も最大となる．

また，面積 S が最大となる $\triangle\mathrm{ABC}$ において

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{1-3\cdot\frac{5}{9}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{3-5}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0$$

であるから

$\angle\mathrm{ABC}$ は **鈍角** ② で，$\angle\mathrm{ACB}$ は **鋭角** ⓪ である． ……(答)