次の問いに答えよ．

(1) 3 辺の長さが $t,\ t+1,\ t+2$ である三角形が存在するような実数 $t$ の値の範囲を求めよ．

以下では，(1) の三角形を $\triangle\mathrm{ABC}$ とし，$\mathrm{BC}=t,\ \mathrm{CA}=t+1,\ \mathrm{AB}=t+2$ とする．

(2) $\cos\angle\mathrm{C}$ を $t$ を用いて表せ．

(3) $\cos\angle\mathrm{C}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(4) $\angle\mathrm{C}=120^\circ$ となるような $t$ の値と，そのときの $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．

(23 北海道教大 1)

---

【答】

(1) $t>1$

(2) $\cos\angle\mathrm{C}=\dfrac{t-3}{2t}$

(3) $-1<\cos\angle\mathrm{C}<\dfrac{1}{2}$

(4) $t=\dfrac{3}{2}$，($\triangle\mathrm{ABC}$ の面積) $=\dfrac{15\sqrt{3}}{16}$

---

【解答】

(1) 3 辺の長さが $t,\ t+1,\ t+2$ である三角形が存在する条件は

(最大な辺の長さ) < (他の 2 辺の長さの和)

であるから

$$(t+2)<t+(t+1) \qquad \therefore\quad \boldsymbol{1<t} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{C}&=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}\\&=\frac{t^2+(t+1)^2-(t+2)^2}{2t(t+1)}\\&=\frac{t^2-2t-3}{2t(t+1)}\\&=\frac{(t-3)(t+1)}{2t(t+1)}\\&=\boldsymbol{\frac{t-3}{2t}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

となる．

(3) (2) の結果より

$$\cos\angle\mathrm{C}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2t}$$

$t>1$ のとき $\dfrac{3}{2t}$ は区間 $0<\dfrac{3}{2t}<\dfrac{3}{2}$ の範囲を動くので，$\cos\angle\mathrm{C}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2t}$ のとり得る範囲は

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}<\frac{1}{2}-\frac{3}{2t}<\frac{1}{2}-0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{-1<\cos\angle\mathrm{C}<\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

(4) $\angle \mathrm{C} = 120^\circ$ のとき

$$\cos\angle 120^\circ = \frac{t-3}{2t}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{t-3}{2t} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{t = \frac{3}{2}}$$ ……(答)

である．このとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\sin\angle\mathrm{C} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdot\sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{16}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．