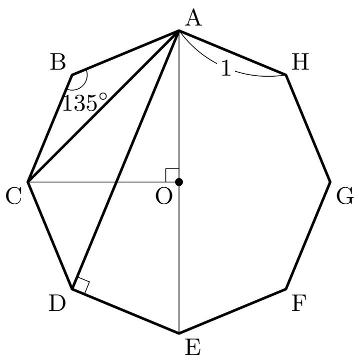
1辺の長さが1の正八角形がある．その頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする．このとき，$\mathrm{AC}^2 = \boxed{\text{ア}}$ であり，$\mathrm{AD}^2 = \boxed{\text{イ}}$ である．ただし，答えが分数のときは，分母を有理化せよ．

(23 山梨大 後 医 1(1))

【答】

ア	イ
$2+\sqrt{2}$	$3+2\sqrt{2}$

【解答】



$\triangle$ABC は頂角 135°，AB = BC = 1 の二等辺三角形である．余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= 1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos135^\circ\\ &= 1+1-2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \mathbf{2+\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．また，$\triangle$ADE は AE を斜辺とする直角三角形であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= (\mathrm{DE}\tan\angle\mathrm{AED})^2\\ &= 1^2\cdot\tan^2\frac{135^\circ}{2}\\ &= \frac{\sin^2\frac{135^\circ}{2}}{\cos^2\frac{135^\circ}{2}} = \frac{1-\cos135^\circ}{1+\cos135^\circ} \quad (\because\ \text{半角の公式})\\ &= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}\\ &= \mathbf{3+2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

- 正八角形の外接円の中心を O とおくと

$$\mathrm{OA} = \mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{OCA} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

である．AC は直角二等辺三角形 OAC の斜辺だから

$$\mathrm{AC}^2 = (\sqrt{2}\mathrm{OA})^2 = 2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$$

であり，$\triangle$ADE は AE を斜辺とする直角三角形であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= \mathrm{AE}^2-\mathrm{DE}^2 = \left(2\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\right)^2-1^2\\ &= 4\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}-1 = 3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

である．

- AE の長さがわかれば，四辺形 ACDE でトレミーの定理を用いてもよい．すなわち

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CE} = \mathrm{AC}\cdot\mathrm{DE}+\mathrm{CD}\cdot\mathrm{AE}$$

$$\mathrm{AD}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot1+1\cdot2\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AD} = 1+\sqrt{2} \qquad \therefore\quad \mathrm{AD}^2 = 3+2\sqrt{2}$$

である．