

面積が $30\sqrt{5}$ の三角形 ABC において、 $BC : CA : AB = 4 : 7 : 9$ のとき、次の問いに答えよ。

- (i) $\cos A$ の値を求めよ。
 (ii) 辺 BC の長さを求めよ。
 (iii) 三角形 ABC の外接円の半径 R を求めよ。

(23 東北学院大 文系・情報 A 2)

【答】

- (i) $\cos A = \frac{19}{21}$
 (ii) $BC = 4\sqrt{5}$
 (iii) $R = \frac{21}{2}$

【解答】

- (i) $BC : CA : AB = 4 : 7 : 9$ であるから、3 辺 BC, CA, AB の長さは正の数 k を用いて

$$BC = 4k, CA = 7k, AB = 9k$$

とおくことができる。余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} \\ &= \frac{49k^2 + 81k^2 - 16k^2}{2 \cdot 7k \cdot 9k} \\ &= \frac{114}{2 \cdot 7 \cdot 9} \\ &= \frac{19}{21} \end{aligned}$$

……(答)

である。

- (ii) (1) より

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{19}{21}\right)^2} = \frac{\sqrt{(21-19)(21+19)}}{21} = \frac{\sqrt{2 \cdot 40}}{21} = \frac{4\sqrt{5}}{21}$$

$\triangle ABC$ の面積は $30\sqrt{5}$ であるから

$$\frac{1}{2} CA \cdot AB \sin A = 30\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7k \cdot 9k \cdot \frac{4\sqrt{5}}{21} = 30\sqrt{5}$$

$$6\sqrt{5}k^2 = 30\sqrt{5} \quad \therefore k = \sqrt{5} (> 0)$$

よって

$$BC = 4\sqrt{5}$$

……(答)

である。

- (iii) 正弦定理より

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{\sin A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{\frac{4\sqrt{5}}{21}} = \frac{21}{2}$$

……(答)

である。

