三角形 ABC が $\mathrm{AB}=4,\ \mathrm{BC}=5,\ \mathrm{CA}=7$ を満たすとき，次の問いに答えなさい．

(i) 三角形 ABC の面積を求めなさい．
(ii) 三角形 ABC の外接円の半径を求めなさい．

(23 福島大 発達文化文化 4(1))

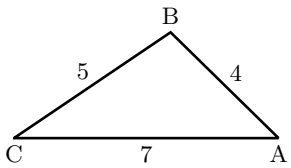
【答】

(i) $4\sqrt{6}$

(ii) $\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$

【解答】

(i) 余弦定理より



$$\cos\angle\mathrm{A}=\frac{4^2+7^2-5^2}{2\cdot4\cdot7}=\frac{40}{2\cdot4\cdot7}=\frac{5}{7}$$

$$\therefore\quad \sin\angle\mathrm{A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{24}}{7}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

よって，三角形 ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{A}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot7\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=\boldsymbol{4\sqrt{6}}$$ ……(答)

である．

- $a=\mathrm{BC},\ b=\mathrm{CA},\ c=\mathrm{AB},\ s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと，三角形 ABC の面積 S は

  $$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad(\text{ヘロンの公式})$$

  である．$s=\dfrac{5+7+4}{2}=8$ であるから

  $$S=\sqrt{8(8-5)(8-7)(8-4)}=4\sqrt{6}$$

  である．

(ii) 三角形 ABC の半径を R とおくと，正弦定理より

$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{A}}=\frac{5}{\frac{2\sqrt{6}}{7}}=\frac{35\sqrt{6}}{12}$$

よって

$$R=\boldsymbol{\frac{35\sqrt{6}}{24}}$$ ……(答)

である．

- $S=\dfrac{abc}{4R}$ を用いると

  $$R=\frac{abc}{4S}=\frac{5\cdot7\cdot4}{4\cdot4\sqrt{6}}=\frac{35\sqrt{6}}{24}$$

  である．