平面上の 3 点 A，B，C 間のそれぞれの距離が $\mathrm{AB}=4x$，$\mathrm{BC}=x^2+3$，$\mathrm{CA}=x^2+2x-3$ となっている．以下の問に答えよ．

(1) $\mathrm{AB}+\mathrm{CA}>\mathrm{BC}$ となる x の条件を求めよ．
(2) 点 A，B，C を頂点とする三角形が存在するための x の条件を求めよ．
(3) x が (2) の条件をみたすとき，$\angle\mathrm{A}$ の大きさを求めよ．
(4) x が (2) の条件をみたすとき，$\angle\mathrm{A}$，$\angle\mathrm{B}$，$\angle\mathrm{C}$ の大小関係を明らかにせよ．

(23 群馬大 情報 2)

【答】

(1) $x>1$
(2) $x>1$
(3) $\angle\mathrm{A}=60^\circ$
(4) $\begin{cases} 1<x<3 \text{ のとき} & \angle\mathrm{B}<\angle\mathrm{A}<\angle\mathrm{C} \\ x=3 \text{ のとき} & \angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{C} \\ 3<x \text{ のとき} & \angle\mathrm{C}<\angle\mathrm{A}<\angle\mathrm{B} \end{cases}$

【解答】

(1) $\mathrm{AB}+\mathrm{CA}>\mathrm{BC}$ となる x の条件は

$$4x+(x^2+2x-3)>x^2+3$$
$$6x>6 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x>1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 点 A，B，C を頂点とする三角形が存在するための条件は

$$\begin{cases} \mathrm{AB}+\mathrm{CA}>\mathrm{BC} & \cdots\cdots ① \\ \mathrm{AB}+\mathrm{BC}>\mathrm{CA} & \cdots\cdots ② \\ \mathrm{BC}+\mathrm{CA}>\mathrm{AB} & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

である．

① は (1) で済んでおり，$x>1$ である．このとき

$$②:\mathrm{AB}+\mathrm{BC}-\mathrm{CA}=4x+(x^2+3)-(x^2+2x-3)=2x+6>0$$
$$③:\mathrm{BC}+\mathrm{CA}-\mathrm{AB}=(x^2+3)+(x^2+2x-3)-4x=2x(x-1)>0$$

が確認されるので，求める条件は

$$\boldsymbol{x>1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{A}&=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}}\\&=\frac{(4x)^2+(x^2+2x-3)^2-(x^2+3)^2}{2(4x)(x^2+2x-3)}\\&=\frac{(4x)^2+(2x^2+2x)(2x-6)}{2(4x)(x^2+2x-3)}\\&=\frac{16x^2+4(x^3-2x^2-3x)}{2(4x)(x^2+2x-3)}\\&=\frac{4x(x^2+2x-3)}{2(4x)(x^2+2x-3)}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0 < \angle\mathrm{A} < 180^\circ$ より

$$\angle\mathrm{A} = \mathbf{60^\circ} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) (3) より，$\angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = 120^\circ$ となることに注意すると，$\angle\mathrm{A}$，$\angle\mathrm{B}$，$\angle\mathrm{C}$ の大小は

(i) $\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{C}$
(ii) $\angle\mathrm{B} < \angle\mathrm{A} < \angle\mathrm{C}$
(iii) $\angle\mathrm{C} < \angle\mathrm{A} < \angle\mathrm{B}$

のいずれかである．$\angle\mathrm{A}$，$\angle\mathrm{B}$，$\angle\mathrm{C}$ の大小は，対辺の長さ

$$\mathrm{BC} = x^2 + 3,\ \mathrm{CA} = x^2 + 2x - 3,\ \mathrm{AB} = 4x$$

の大小と一致する．(i) となるのは

$$4x = x^2 + 3 = x^2 + 2x - 3$$

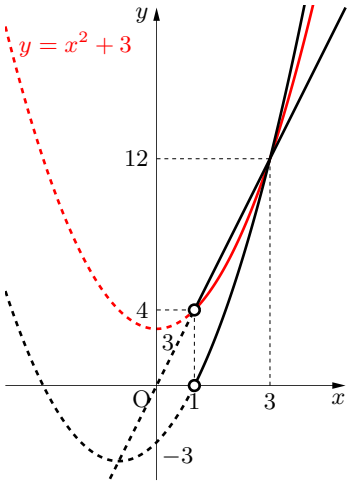
$$\iff \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ 2x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad x = 3$$

のときである．(2) より，$x > 1$ であることに注意すると

$1 < x < 3$ のとき，$\mathrm{CA} < \mathrm{BC} < \mathrm{AB}$
$x = 3$ のとき，$\mathrm{CA} = \mathrm{BC} = \mathrm{AB}$
$x > 3$ のとき，$\mathrm{CA} < \mathrm{BC} < \mathrm{AB}$

であるから，$\angle\mathrm{A}$，$\angle\mathrm{B}$，$\angle\mathrm{C}$ の大小は



$$\begin{cases} \mathbf{1 < x < 3\ のとき} & \mathbf{\angle B < \angle A < \angle C} \\ \mathbf{x = 3\ のとき} & \mathbf{\angle B = \angle A = \angle C} \\ \mathbf{3 < x\ のとき} & \mathbf{\angle C < \angle A < \angle B} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．