$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，θ の関数を次のように定義する．

$$y = -\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta - \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) y が実数 $a,\ b,\ c,\ k$ を用いて

$$y = as^2 + bs + c, \quad s = \cos\theta + k\sin\theta$$

と表されるとき，$a,\ b,\ c,\ k$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $y \leqq 0$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(23 東京海洋大 生命・資源 5)

【答】

(1) $a=1,\ b=-1,\ c=-2,\ k=\sqrt{3}$

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi$

【解答】

$$y = -\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta - \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) $s = \cos\theta + k\sin\theta$ を $y = as^2 + bs + c$ に代入すると

$$\begin{aligned} y &= a(\cos\theta + k\sin\theta)^2 + b(\cos\theta + k\sin\theta) + c \\ &= a(\cos^2\theta + 2k\sin\theta\cos\theta + k^2\sin^2\theta) + b\cos\theta + bk\sin\theta + c \\ &= a\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} + k\sin 2\theta + k^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) + b\cos\theta + bk\sin\theta + c \\ &= \frac{a-k^2}{2}\cos 2\theta + ak\sin 2\theta + b\cos\theta + bk\sin\theta + c + \frac{a+k^2}{2} \qquad \cdots\cdots (**) \end{aligned}$$

となる．$(*)$ と $(**)$ は一致するから

$$\begin{cases} \dfrac{a-k^2}{2} = -1 & \cdots\cdots ① \\ ak = \sqrt{3} & \cdots\cdots ② \\ b = -1 & \cdots\cdots ③ \\ bk = -\sqrt{3} & \cdots\cdots ④ \\ c + \dfrac{a+k^2}{2} = 0 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

③，④，②，⑤ より

$$b=-1,\ k=\sqrt{3},\ a=1,\ c=-\frac{1+3}{2}=-2$$

であり，これは ① を満たす．

よって

$$\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=-2,\ k=\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $s = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ とおくと，(1) より

$$\begin{aligned} &y \leqq 0 \iff s^2 - s - 2 \leqq 0 \\ &(s+1)(s-2) \leqq 0 \\ \therefore\quad &-1 \leqq s \leqq 2 \qquad \cdots\cdots ⑥ \end{aligned}$$

である．$s=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから

$$⑥ \iff -1 \leqq 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) \leqq 2$$

$$-\frac{1}{2} \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{6} \leqq \theta+\frac{\pi}{6} \leqq \frac{7}{6}\pi,\ \ \frac{11}{6}\pi \leqq \theta+\frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \pi,\ \ \frac{5}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．