$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解きなさい．

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$$

(23 福島大 人間発達文化 1(3))

【答】 $\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

【解答】

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

和を積に直す公式を用いると

$$\begin{aligned}\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta &= 2\cos 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta \\ &= (2\cos\theta + 1)\cos 2\theta\end{aligned}$$

であるから

$$① \iff 2\cos\theta + 1 = 0 \text{ または } \cos 2\theta = 0$$

である．$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意すると

(i) $2\cos\theta + 1 = 0$ のとき，$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ であり

$$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

である．

(ii) $\cos 2\theta = 0$ のとき，$0 \leqq 2\theta < 4\pi$ なので，$2\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$ であり

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

である．

以上 (i)，(ii) より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{7}{4}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 2 倍角の公式と 3 倍角の公式を用いると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \cos\theta + (2\cos^2\theta - 1) + (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ &= 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 \\ &= (2\cos\theta + 1)(2\cos^2\theta - 1)\end{aligned}$$

となる．よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意すると ① は $\cos\theta = -\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり

$$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$$

すなわち

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

である．