方程式

$$2\cos 2x + a\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

について，次の各問に答えよ．ただし，a を実数とし，$0 \leqq x \leqq \pi$ とする．

(1) $a = 2$ のとき，$(*)$ を満たす x の値を求めよ．
(2) $t = \sin x$ とおいて，t のとり得る値の範囲を求め，$(*)$ を t の方程式で表せ．
(3) $(*)$ を満たす x はいくつあるか．a の値によって分類せよ．

(23 茨城大 教育 3)

【答】

(1) $x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$
(2) $0 \leqq t \leqq 1$，$4t^2 + at - 2 = 0$
(3) $\begin{cases} a < -2 \text{ のとき，} & x \text{ は } 0 \text{ 個} \\ a = -2 \text{ のとき，} & x \text{ は } 1 \text{ 個} \\ a > -2 \text{ のとき，} & x \text{ は } 2 \text{ 個} \end{cases}$

【解答】

$$2\cos 2x + a\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) $a = 2$ のとき，$(*)$ を解くと

$$\begin{aligned} &2\cos 2x + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ &2(1 - 2\sin^2 x) - 2\sin x = 0 \\ &2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ &(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $0 \leqq \sin x \leqq 1$ なので

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $t = \sin x$ とおくと，$0 \leqq x \leqq \pi$ より t のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{0 \leqq t \leqq 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，$(*)$ を t で表すと

$$\begin{aligned} &2(1 - 2\sin^2 x) - a\sin x = 0 \\ &4\sin^2 x + a\sin x - 2 = 0 \\ &\therefore \quad \boldsymbol{4t^2 + at - 2 = 0} \qquad \cdots\cdots (**) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

(3) $t = \sin x$ とおくとき，t の値 1 個に対応する x の値の個数は

$$\begin{aligned} &0 \leqq t < 1 \text{ のとき，} && x \text{ は } 2 \text{ 個} \\ &t = 1 \text{ のとき，} && x \text{ は } 1 \text{ 個} \end{aligned}$$

であることに注意する．(2) の $(**)$ は

$$-4t^2+2=at$$

と変形される．

$(**)$ を満たす t の個数は放物線 $y=-4t^2+2$ と直線 $y=at$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における共有点の個数に一致する．右図から

$a<-2$ のとき，　t は 0 個

$a \geqq -2$ のとき，　t は 1 個

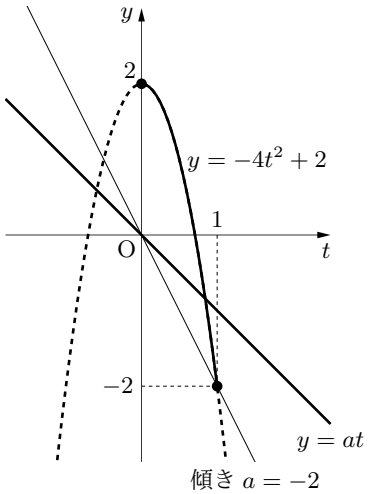
存在するから

$a<-2$ のとき，　x は 0 個

$a=-2$ のとき，　x は 1 個

$a>-2$ のとき，　x は 2 個

である．



- 解答の流れから $t=0$ となる実数 a は存在しないことがわかる．したがって，(2) の t のとり得る値の範囲を「$(*)$ かつ $0 \leqq x \leqq \pi$」を満たす $t(=\sin x)$ のとり得る値の範囲と解釈すると

  $$0<t \leqq 1$$

  が求める範囲となる．