$\cos\theta = \alpha$ として，$\cos 3\theta$ を α で表せ．また，$\theta = \dfrac{\pi}{9}$ のとき，三角関数の積 $\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta$ の値を求めよ．

(23 三重大 教育・生資・人文・医 (医・看)・工 1(4))

【答】 $\cos 3\theta = 4\alpha^3 - 3\alpha$，$\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta = \dfrac{1}{8}$

【解答】

加法定理より

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\
&= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= (2\alpha^2 - 1)\alpha - 2(1 - \alpha^2)\alpha \\
&= \boldsymbol{4\alpha^3 - 3\alpha} && \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

次に，$\theta = \dfrac{\pi}{9}$ より

$$\cos 3\theta = \frac{1}{2}, \quad \cos 6\theta = -\frac{1}{2}$$

であることに注意すると，積を和になおす公式より

$$\begin{aligned}
\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta &= \cos\theta \cdot \frac{1}{2}(\cos 6\theta + \cos 2\theta) \\
&= \frac{1}{2}(\cos 6\theta \cdot \cos\theta + \cos 2\theta \cdot \cos\theta) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\theta + \cos 2\theta \cdot \cos\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}(\cos 3\theta + \cos\theta)\right\} \\
&= \frac{1}{4}\cos 3\theta \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{8}} && \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．