$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，2 つの関数 $x = \cos\theta + \sin\theta$, $y = \cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ について，以下の問に答えよ．

(1) x のとりうる値の範囲を求めよ．
(2) y を x の関数で表せ．
(3) y の最大値と最小値を求めよ．

(23 群馬大 理工・情報 4)

【答】

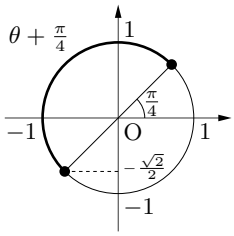
(1) $-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}$
(2) $y = x^2 - \dfrac{x}{\sqrt{2}} - 1$
(3) 最大値は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，最小値は $-\dfrac{9}{8}$

【解答】

$$0 \leqq \theta \leqq \pi,$$
$$x = \cos\theta + \sin\theta,$$
$$y = \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

(1) 三角関数の合成より

$$x = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \cdots\cdots ①$$



と変形できる．$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq \pi + \dfrac{\pi}{4}$ に注意すると

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ① より

$$x = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left\{-\frac{\pi}{2} + \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right\} = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

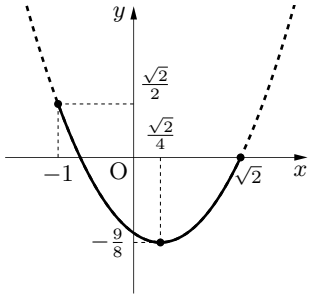
なので，y は

$$\begin{aligned} y &= \cos\left\{2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right\} - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left\{2\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right\} - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \boldsymbol{x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} - 1} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

として x で表すことができる．

(3) (1)，(2) より

$$\begin{aligned} y &= x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} - 1 \\ &= \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} \quad (-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}) \end{aligned}$$



である．x の動く範囲は $-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ であり

頂点の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ -\dfrac{9}{8}\right)$,

$x=-1$ のとき　$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$x=\sqrt{2}$ のとき　$y=0$

であるから，y の

最大値は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，最小値は $-\dfrac{9}{8}$　……(答)

である．