次の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．

座標平面上の 2 点 A$(-2,\ 4)$，B$(6,\ -2)$ を通る円 C が x 軸と 2 点 P，Q で交わる．このとき，次のことがいえる．

(1) 円 C の中心は，直線

$$y=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x-\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

上にある．

(2) 円 C の中心が x 軸上にあるとき，円 C の方程式は

$$x^2+y^2-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x-\boxed{\text{キク}}=0$$

である．

(3) $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ のとき，円 C の中心の座標は

$$\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$$

であり，半径は

$$\boxed{\text{サ}}$$

である．

(4) $\angle\mathrm{PAQ}=45^\circ$，$\mathrm{PQ}=10$ のとき，円 C の中心の座標は

$$\left(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}}\right)$$

であり，半径は

$$\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

である．

(23 神戸学院大 文系・薬 2)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
4	3	5	3	5	2	25	2	1	5	5	5	5	2

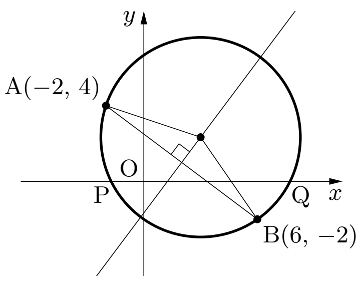
【解答】

(1) 円 C の中心は，2 点 A$(-2,\ 4)$，B$(6,\ -2)$ を結ぶ線分の垂直二等分線上にある．線分 AB の中点の座標は $(2,\ 1)$，直線 AB の傾きは $\dfrac{-2-4}{6-(-2)}=-\dfrac{3}{4}$ であるから，線分 AB の垂直二等分線の方程式は

$$y=\frac{4}{3}(x-2)+1$$

$$\therefore\quad y=\boldsymbol{\frac{4}{3}}x-\boldsymbol{\frac{5}{3}}\qquad\cdots\cdots ①\quad\cdots\cdots(答)$$

であり，中心は直線 ① 上にある

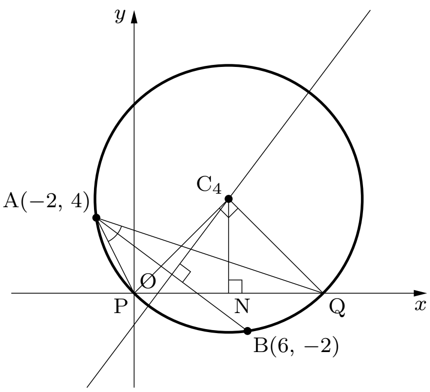


- P の座標を $(x,\ y)$ とおくと，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ より
$$
\begin{aligned}
&(x+2)^2+(y-4)^2=(x-6)^2+(y+2)^2\\
&x^2+y^2+4x-8y+20=x^2+y^2-12x+4y+40\\
&16x-12y-20=0\\
\therefore\quad &y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}
\end{aligned}
$$
である．

(2) 円 C の中心が x 軸上にあるときの中心を C_2 とおくと，C_2 の x 座標は ① より
$$0=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}\qquad\therefore\quad x=\frac{5}{4}\qquad\therefore\quad \mathrm{C}_2\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$$
であり，半径の 2 乗は
$$\mathrm{C}_2\mathrm{A}^2=\left(-2-\frac{5}{4}\right)^2+4^2=\frac{13^2+16^2}{4^2}=\frac{425}{16}$$
であるから，円 C の方程式は
$$
\begin{aligned}
&\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{425}{16}\\
&x^2+y^2-\frac{5}{2}x-\frac{425-25}{16}=0\\
\therefore\quad &x^2+y^2-\boldsymbol{\frac{5}{2}}x-\mathbf{25}=0
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(\text{答})
$$
である．

(3) $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ のときの円 C の中心を C_3 とおく．線分 AB は直径の一つであり，C_3 は線分 AB の中点である．よって，C_3 の座標は
$$\mathbf{(2,\ 1)}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$
であり，半径は
$$\mathrm{C}_3\mathrm{A}=\sqrt{(-2-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{16+9}=\mathbf{5}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$
である．

(4) $\angle\mathrm{PAQ}=45^\circ$，$\mathrm{PQ}=10$ のとき，円 C の中心を C_4 とおく．円周角と中心角の関係より，$\angle\mathrm{PC}_4\mathrm{Q}=90^\circ$ であり，$\triangle\mathrm{PC}_4\mathrm{Q}$ は直角二等三角形である．PQ の中点をNとおくと $\mathrm{C}_4\mathrm{N}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}=5$ である．C_4 は ① 上の点でもあるから
$$5=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}\qquad\therefore\quad x=5$$
中心 C_4 の座標は
$$\mathbf{(5,\ 5)}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$
であり，半径は
$$\mathbf{5\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$
である．



- $\triangle\mathrm{PAQ}$ で正弦定理を用いると，円の半径は
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\sin 45^\circ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=5\sqrt{2}$$
である．