以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(a,\ b)$ を中心とし，半径が 3 の円を C とする．円 $x^2+y^2=5$ と円 C との 2 つの共有点を通る直線が $x-y+1=0$ となる点 $(a,\ b)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた 2 つの共有点と点 $(a,\ b)$ を通る円の中心と半径を求めよ．

(23 三重大 後 生資 2)

【答】

(1) $(-2,\ 2),\ (1,\ -1)$

(2) 中心の座標は $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，半径は $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

【解答】

(1)

$$\text{円 C}:\ (x-a)^2+(y-b)^2=3^3 \quad \cdots\cdots ①$$

$$x^2+y^2=5 \quad \cdots\cdots ②$$

$$x-y+1=0 \quad \cdots\cdots ③$$

k を定数とするとき，方程式

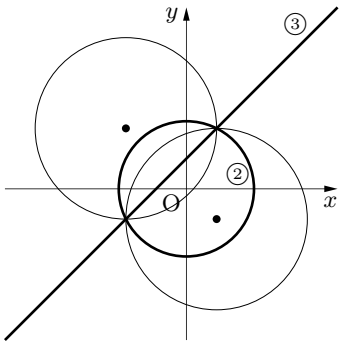
$$(x^2+y^2-5)+k(x-y+1)=0 \quad \cdots\cdots (*)$$

を満たす図形は ②, ③ の共有点すべてを通る図形である．これは

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{2}-k+5$$

であり，これが ① と一致する条件は

$$\begin{cases} a=-\dfrac{k}{2} & \cdots\cdots ④ \\ b=\dfrac{k}{2} & \cdots\cdots ⑤ \\ 3^2=\dfrac{k^2}{2}-k+5 & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$



である．⑥ を解くと

$$k^2-2k-8=0$$

$$(k-4)(k+2)=0$$

$$\therefore\quad k=4,\ -2$$

である．④, ⑤ より，点 $(a,\ b)$ は

$$\mathbf{(-2,\ 2),\ (1,\ -1)} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) ②, ③ の 2 つの共有点を通る図形 $(*)$ が (1) で求めた点 $(-2,\ 2)$ を通るとき

$$\{(-2)^2+2^2-5\}+k(-2-2+1)=0$$

$$3-3k=0 \qquad \therefore\quad k=1$$

であり，$(*)$ は

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{2} \quad \cdots\cdots ⑦$$

となる．この円 ⑦ は点 $(1,\ -1)$ を通る．

よって，(1) の点 $(a,\ b)$ がいずれのときも ⑦ が求める円であり

$$\textbf{中心の座標は}\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \textbf{半径は}\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．