方程式 $(x-1)^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ が表す円を C とし，原点 O を通り傾きが k である直線 $y=kx$ を ℓ とする．円 C と直線 ℓ が異なる 2 点で交わるとき，二つの交点を P_1, P_2 とし，それらの x 座標をそれぞれ α, β $(\alpha<\beta)$ とする．また線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点を P とする．

(1) 円 C の中心の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ であり，円 C が y 軸に接するときの r の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) 円 C と直線 ℓ の方程式より y を消去すると

$$(1+k^2)x^2-2x+1-r^2=0$$

が得られる．これより

$$\alpha+\beta=\boxed{\text{エ}},\qquad \alpha\beta=\boxed{\text{オ}}$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ $\dfrac{2}{1+k^2}$	① $-\dfrac{2}{1+k^2}$	② $\dfrac{1-r^2}{1+k^2}$	③ $-\dfrac{1-r^2}{1+k^2}$
④ 2	⑤ -2	⑥ $1-r^2$	⑦ $-(1-r^2)$

(3) $r=\dfrac{2}{3}$ の場合を考える．円 C と直線 ℓ が共有点をもつような k の値の範囲は

$$-\frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\leqq k\leqq\frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である．

円 C と直線 ℓ が接するときの接点について考える．直線 ℓ の傾き k が正である場合の接点を Q_1 とし，傾き k が負である場合の接点を Q_2 とするとき，Q_1 と Q_2 の x 座標はどちらも $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．

(4) $r=\dfrac{2}{3}$ の場合を考える．円 C と直線 ℓ が異なる 2 点 P_1, P_2 で交わるように，k の値を変化させる．このときの，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点 P の軌跡を求めよう．点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}\qquad\cdots\cdots ①$$

$$y=kx\qquad\cdots\cdots ②$$

である．ここで，$x>0$ であるので，② より $k=\dfrac{y}{x}$ と表すことができる．さらに ① と (2) の $\alpha+\beta=\boxed{\text{エ}}$ から

$$\left(x-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right)^2+y^2=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\qquad\cdots\cdots ③$$

が得られる．方程式 ③ が表す図形を C' とすると，C' は $\boxed{\text{ソ}}$ であり，求める軌跡は C' のうち，$x > \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ を満たす部分である．

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ 原点 $(0,\ 0)$ と円 C の中心を直径の両端とする円
① 点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ と円 C の中心を直径の両端とする円
② 原点 $(0,\ 0)$ を中心とし，円 C の中心を通る円
③ 点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ を中心とし，円 C の中心を通る円

(5) 原点 O が円 C の内部にある場合を考えよう．以下，$r = 3$ とする．k の値を変化させるとき，線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の中点 P は $\boxed{\text{ツ}}$ の上を動く．

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ 原点 $(0,\ 0)$ と円 C の中心を直径の両端とする円
① 点 $(-2,\ 0)$ と円 C の中心を直径の両端とする円
② 原点 $(0,\ 0)$ を中心とし，円 C の中心を通る円
③ 点 $(-2,\ 0)$ を中心とし，円 C の中心を通る円

(23 共通テスト 追・再試験 II 3)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
1	0	1	0	2	2	5	5	5	9	1	2	1	4	0	5

チ	ツ
9	0

【解答】

$$C : (x-1)^2 + y^2 = r^2 \ (r > 0)$$

$$\ell : y = kx$$

(1) 円 C の中心の座標は

(1, 0) ……(答)

であり，円 C が y 軸に接するときの r の値は中心 $(1,\ 0)$ と y 軸との距離に等しいから

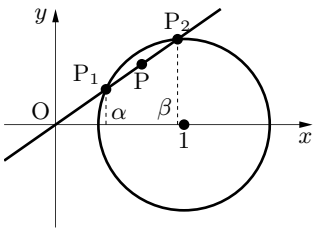
1 ……(答)

である．

(2) 円 C と直線 ℓ が異なる 2 点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ で交わるとき，円 C と直線 ℓ の方程式より y を消去すると

$$(x-1)^2 + (kx)^2 = r^2$$

$$\therefore\ \ (1+k^2)x^2 - 2x + 1 - r^2 = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$



が得られる．α，β $(\alpha < \beta)$ はそれぞれ $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ の x 座標であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\boldsymbol{\frac{2}{1+k^2}},\qquad a\beta=\boldsymbol{\frac{1-r^2}{1+k^2}}\qquad (\text{順に}⓪,\ ②)\qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

が成り立つ．

(3) $r=\dfrac{2}{3}$ のとき，$(*)$ は

$$(1+k^2)x^2-2x+\frac{5}{9}=0\qquad \cdots\cdots\ (**)$$

となる．円 C と直線 ℓ が共有点をもつ条件は，$(**)$ が実数解をもつことである．すなわち，$(**)$ の判別式を D とおくと $D\geqq 0$ である．

$$\frac{D}{4}=1-(1+k^2)\cdot\frac{5}{9}=\frac{4-5k^2}{9}$$

より，k の値の範囲は

$$4-5k^2\geqq 0\qquad \therefore\quad \boldsymbol{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}\leqq k\leqq\frac{2\sqrt{5}}{5}\qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

円 C と直線 ℓ が接するとき，$D=0$ であり

$$4-5k^2=0\qquad \left(k=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

である．よって，接点の x 座標は接線の傾きの正負に関わらず

$$x=\frac{1}{1+k^2}=\frac{1}{1+\frac{4}{5}}=\boldsymbol{\frac{5}{9}}\qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $r=\dfrac{2}{3}$ のとき，円 C と直線 ℓ が異なる 2 点 P_1，P_2 で交わるように k の値が変化する．このとき，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\beta}{2} & \cdots\cdots ① \\ y=kx & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である．ここで，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{1+k^2}>0$ であるから，②は $k=\dfrac{y}{x}$ と表すことができる．

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{1+k^2} \\ k=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

であるから

$$x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$x=\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$x^2+y^2=x\quad (\because\ x\neq 0)$$

$$\therefore\quad \left(x-\boldsymbol{\frac{1}{2}}\right)^2+y^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\qquad \cdots\cdots ③\qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

を得る．③ は

$$x(x-1)+y^2=0$$

と表すこともできる．したがって，方程式 ③ が表す図形 C' は

原点 $(0,\ 0)$ と円 C の中心を直径の両端とする円　　(⓪)　　……(答)

である．k の値の範囲を考えると，$D>0$ であり $k^2<\dfrac{4}{5}$ であるから

$$x>\frac{1}{1+\frac{4}{5}}=\frac{5}{9}$$

である．よって，求める軌跡は C' のうち，$x>\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$ を満たす部分である．　　……(答)

- 点 P の軌跡は「$-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<k<\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$」のもとで「① かつ ②」を満たす点の集合，すなわち

$$(\star)\begin{cases}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<k<\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ x=\dfrac{1}{1+k^2}\\ y=kx\end{cases}$$

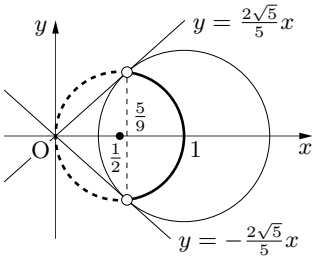
を満たす実数 k が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．これは

$$(\star)\iff\begin{cases}k=\dfrac{y}{x}\quad(\because\ x>0)\\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<\dfrac{y}{x}<\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ x=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\end{cases}$$

であり，P の軌跡は

$$\begin{cases}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x<y<\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x\quad(\because\ x>0)\\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

となる (右図太実線部分)．



円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ と 2 直線 $y=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x$ の共有点の x 座標は

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{4}{5}x^2=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad \frac{9}{5}x^2-x=0$$

$x>0$ より，接点 Q_1，Q_2 の x 座標はどちらも $\dfrac{5}{9}$ である．

(5) $r=3$ のとき，$(*)$ は

$$(1+k^2)x^2-2x-8=0\qquad\cdots\cdots\ (***)$$

となる．原点 O が円 C の内部にあるとき，$(***)$ はつねに実数解をもつから，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点 P は任意の実数 k に対して

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{1+k^2}\\ k=\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

である．(4) の方程式

$$x(x-1)+y^2=0$$

を得るから，点 P は

原点 (0, 0) と円 C の中心を直径の両端とする円　　(⓪)　　……(答)

の上を動く．

- 除外点も吟味しておく．
  点 P の軌跡は

$$(\star\star)\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+k^2} \\ y = kx \end{cases}$$

を満たす実数 k が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．$x = \dfrac{1}{1+k^2} \neq 0\ (>0)$ より

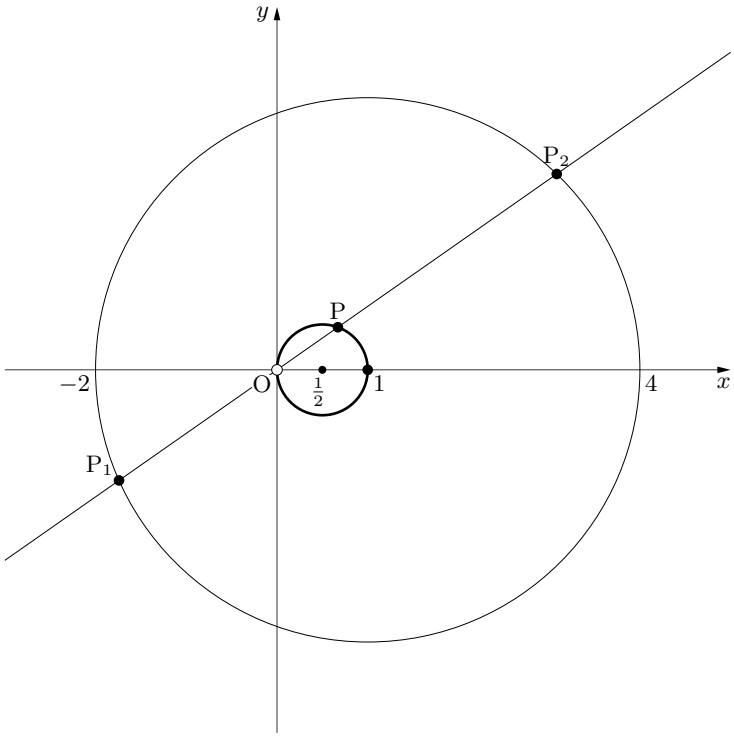
$$(\star\star) \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{1+k^2} \\ k = \dfrac{y}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} k = \dfrac{y}{x} \\ x = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \end{cases}$$

であり，求める軌跡の方程式は

$$x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \iff \begin{cases} x = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x^2+y^2 = x \\ x \neq 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\ (x \neq 0)$$

である．P の軌跡は下図の太線部分となる．白丸は除く．