平面上の半径 1 の円 C の中心 O から距離 4 だけ離れた点 L をとる．点 L を通る円 C の 2 本の接線を考え，この 2 本の接線と円 C の接点をそれぞれ M，N とする．以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 LMN の面積を求めよ．

(2) 三角形 LMN の内接円の半径 r と，三角形 LMN の外接円の半径 R をそれぞれ求めよ．

(23 東北大 文系 2)

【答】

(1) $\dfrac{15\sqrt{15}}{16}$

(2) $r=\dfrac{3}{4}$，$R=2$

【解答】

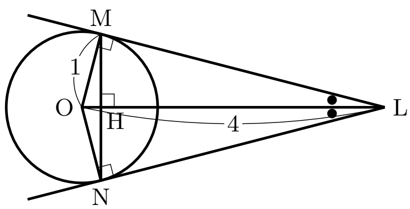
(1) $\angle\mathrm{OML}=\angle\mathrm{ONL}=90^\circ$ であり，

$\triangle\mathrm{OML}\equiv\triangle\mathrm{ONL}$ である．三平方の定理より

$$\mathrm{ML}=\mathrm{NL}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$$

であり，$\angle\mathrm{OLM}=\alpha$ とおくと

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{OL}}=\frac{\sqrt{15}}{4},$$
$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OL}}=\frac{1}{4}$$



である．線分 OL と線分 MN の交点を H とおくと

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{LMN}\text{ の面積})&=2\triangle\mathrm{LMH}=2\times\frac{1}{2}\mathrm{LH}\cdot\mathrm{MH}\\&=\mathrm{ML}\cos\alpha\cdot\mathrm{ML}\sin\alpha\\&=(\sqrt{15})^2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4}\\&=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{15}}{16}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

- 次のようにして面積を求めてもよい．

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{LMN}\text{ の面積})&=\frac{1}{2}\mathrm{LM}\cdot\mathrm{LN}\sin 2\alpha\\&=\mathrm{LM}^2\sin\alpha\cos\alpha\quad(\because\ \mathrm{LN}=\mathrm{LM})\\&=(\sqrt{15})^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{15\sqrt{15}}{16}\end{aligned}$$

(2) $\triangle$LMN の面積を内接円の半径 r を用いて表すと

$$(\triangle\mathrm{LMN}\text{ の面積})=\frac{1}{2}r(\mathrm{ML}+\mathrm{NL}+\mathrm{MN})$$

であるから

$$\frac{15\sqrt{15}}{16}=\frac{1}{2}r\left\{\sqrt{15}+\sqrt{15}+2\left(\sqrt{15}\cdot\frac{1}{4}\right)\right\}$$
$$\frac{15}{16}=\frac{1}{2}\left(1+1+\frac{1}{2}\right)r$$
$$\therefore\quad r=\frac{15}{16}\cdot\frac{4}{5}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$ ……(答)

である．また，△LMN の外接円の半径 R は正弦定理より

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{MN}}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である

- $\angle\mathrm{OML} = \angle\mathrm{ONL} = 90^\circ$ より，四角形 OMLN は OL を直径とする円に内接するから，△LMN の外接円は OL を直径とする円である．
  よって，△LMN の外接円の半径 R は

  $$\frac{\mathrm{OL}}{2} = 2$$

  である．