2 つの実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$z=2x+y$ のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(23 立教大 コミュニティ福祉・経営・経済など 1(2))

【答】

イ
$-\sqrt{5} \leqq z \leqq \sqrt{5}$

【解答】

実数 $x,\ y$ は $x^2+y^2=1$ を満たすから

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

と表すことができる．このとき

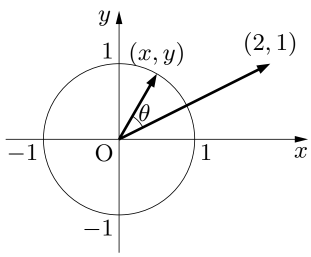
$$\begin{aligned} z &= 2x+y \\ &= 2\cos\theta+\sin\theta \\ &= \sqrt{5}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\cos\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha) \quad \left(\alpha \text{ は } \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ を満たす定角}\right) \end{aligned}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ であるから，z のとりうる値の範囲は

$$-\sqrt{5} \leqq z \leqq \sqrt{5}$$

である．

- 積の和はベクトルの内積とみることもできる．



$$\begin{aligned} z = 2x+y &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2^2+1^2}\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta \\ &= \sqrt{5}\cos\theta \end{aligned}$$

ここで，θ はベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のなす角であるから

$$-\sqrt{5} \leqq z \leqq \sqrt{5}$$

である．

- z のとりうる値の範囲は，$x^2+y^2=1$ …… ㋐ かつ $z=2x+y$ …… ㋑ を満たす実数 $x,\ y$ が存在するような z の値の集合である．

  $x,\ y$ が ㋐ かつ ㋑ を満たすということは，xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ と直線 $2x+y-z=0$ が共有点をもつということであり，円と直線が共有点をもつ条件は

  (中心と直線の距離) $\leqq$ (半径)

  であるから

$$\frac{|0+0-z|}{\sqrt{2^2+1^2}} \leqq 1 \qquad \therefore \quad |z| \leqq \sqrt{5} \qquad \therefore \quad -\sqrt{5} \leqq z \leqq \sqrt{5}$$

  である．