座標平面上に点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 2)$，B$\left(\sqrt{2},\ 1\right)$ をとる．線分 OA 上に点 O，点 A と異なる点 P$(0,\ p)$ をとり，線分 BP 上の点 Q を，△APQ と △OBQ の面積が等しくなるようにとる．

(1) 直線 BP を表す方程式を求めよ．
(2) △OBQ の面積を p を用いて表せ．
(3) p が $0 < p < 2$ の範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

(23 千葉大 1)

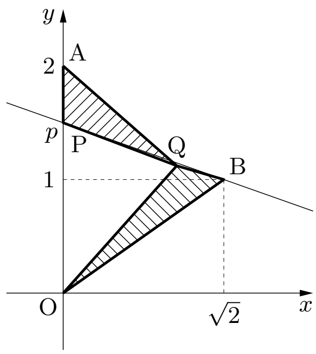
【答】

(1) $y = \dfrac{1-p}{\sqrt{2}}x + p$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(2-p)p$

(3) 放物線 $y = -x^2 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}x$ の $0 < x < \sqrt{2}$ の部分

【解答】



(1) B$\left(\sqrt{2},\ 1\right)$，P$(0,\ p)$ を結ぶ直線 BP の方程式は

$$\boldsymbol{y = \frac{1-p}{\sqrt{2}}x + p} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 線分 BP 上の点 Q の x 座標を q $(0 < q < \sqrt{2})$ とおくと

$$(\triangle\text{OBQ の面積}) = (\triangle\text{APQ の面積}) = \frac{1}{2}(2-p)q$$

である．また，△OBP，△AOQ に着目すると

$$(\triangle\text{OBP の面積}) = (\triangle\text{AOQ の面積})$$

$$\frac{1}{2}p\sqrt{2} = \frac{1}{2}2q$$

$$\therefore\quad q = \frac{\sqrt{2}}{2}p$$

であるから

$$(\triangle\text{OBQ の面積}) = \frac{1}{2}(2-p)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}p = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}(2-p)p} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) Q の x 座標は $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}p$ ⋯⋯ ① であるから，Q の y 座標は

$$y = \frac{1-p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}p + p = \frac{3-p}{2}p \qquad \cdots\cdots ②$$

である．p が $0 < p < 2$ ⋯⋯ ③ の範囲を動くときの点 Q の軌跡は，「①かつ②かつ③」を満たす p が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$\text{「①かつ②かつ③」} \iff \begin{cases} p = \sqrt{2}x \\ y = \dfrac{3-\sqrt{2}x}{2}\sqrt{2}x \\ 0 < \sqrt{2}x < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} p = \sqrt{2}x \\ y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}x - x^2 \\ 0 < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

であるから，点 Q の軌跡は

$$\textbf{放物線 } \boldsymbol{y = -x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x} \textbf{ の } \boldsymbol{0 < x < \sqrt{2}} \textbf{の部分} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．