平面上の 2 つの円が直交するとは，2 つの円が 2 点で交わり，各交点において 2 つの円の接線が互いに直交することである．以下の問いに答えよ．

(1) C_1, C_2 は半径がそれぞれ r_1, r_2 の円とする．C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を d とする．C_1 と C_2 が直交するための必要十分条件を d, r_1, r_2 の関係式で表せ．

(2) p, r_1, r_2 は $p > r_1 + r_2$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ を満たす実数とする．座標平面上において，原点 O を中心とする半径 r_1 の円を C_1，点 $(p,\ 0)$ を中心とする半径 r_2 の円を C_2 とする．C_1 と C_2 のいずれにも直交する円の中心の軌跡を求めよ．

(3) 互いに外部にある 3 つの円の中心が一直線上にないとき，それら 3 つの円のいずれにも直交する円がただ 1 つ存在することを示せ．

(23 熊本大 医 4)

【答】

(1) ${r_1}^2 + {r_2}^2 = d^2$

(2) 直線 $x = \dfrac{p^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2}{2p}$

(3) 略

【解答】

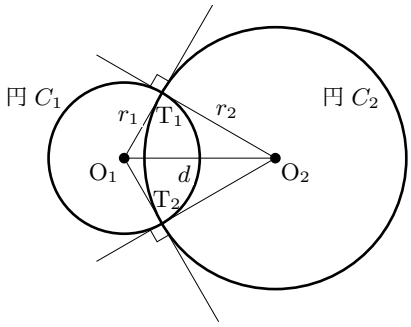
(1) 2 つの円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ とおく．

2 つの円 C_1，C_2 が直交するとは，2 つの円が 2 点で交わり，各交点において 2 つの円の接線が互いに直交することである．

C_1, C_2 の 2 交点を $\mathrm{T_1}$, $\mathrm{T_2}$ とおくと，求める条件は，$\triangle \mathrm{T_1O_1O_2}$(および $\triangle \mathrm{T_2O_1O_2}$) が，$\mathrm{O_1O_2}$ を斜辺とする直角三角形となることである．$\mathrm{O_1T_1} = r_1$, $\mathrm{O_2T_1} = r_2$, $\mathrm{O_1O_2} = d$ であるから，これは

$$\boldsymbol{{r_1}^2 + {r_2}^2 = d^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

と表すことができる．



(2)
$$C_1 : x^2 + y^2 = {r_1}^2 \ (r_1 > 0)$$
$$C_2 : (x-p)^2 + y^2 = {r_2}^2 \ (p > r_1 + r_2,\ r_2 > 0)$$

C_1 と C_2 のいずれにも直交する円 C の中心の座標を $(s,\ t)$，半径を r とおくと，中心の軌跡は

$$\begin{cases} r^2 + {r_1}^2 = s^2 + t^2 & \cdots\cdots ① \\ r^2 + {r_2}^2 = (s-p)^2 + t^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす正の実数 r が存在するような点 $(s,\ t)$ の集合である．

$$\text{「① かつ ②」} \iff \begin{cases} t^2 = r^2 + {r_1}^2 - s^2 \\ r^2 + {r_2}^2 = (s-p)^2 + (r^2 + {r_1}^2 - s^2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t^2 = r^2 + {r_1}^2 - s^2 \\ 2ps = p^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s = \dfrac{p^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2}{2p} & \cdots\cdots ③ \quad (\because\ p > r_1 + r_2 > 0) \\ r^2 = t^2 - {r_1}^2 + \left(\dfrac{p^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2}{2p}\right)^2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

ここで，④ を整理すると

$$\begin{aligned} r^2 &= t^2 + \left(\frac{p^2+{r_1}^2-{r_2}^2}{2p} - r_1\right)\left(\frac{p^2+{r_1}^2-{r_2}^2}{2p} + r_1\right) \\ &= t^2 + \frac{p^2+{r_1}^2-{r_2}^2-2pr_1}{2p} \cdot \frac{p^2+{r_1}^2-{r_2}^2+2pr_1}{2p} \\ &= t^2 + \frac{\{(p-r_1)^2-{r_2}^2\}\{(p+r_1)^2-{r_2}^2\}}{4p^2} \\ &= t^2 + \frac{(p-r_1-r_2)(p-r_1+r_2)(p+r_1-r_2)(p+r_1+r_2)}{4p^2} \end{aligned}$$

$p > r_1 + r_2$ より，任意の実数 t に対して ④ の右辺はつねに正である．したがって，任意の実数 t に対して正の実数 r はつねに存在する．

よって，求める軌跡は

$$\textbf{直線 } \boldsymbol{x = \frac{p^2+{r_1}^2-{r_2}^2}{2p}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 互いに外部にある 3 つの円を C_1，C_2，C_3 とおき，その中心をそれぞれ O_1，O_2，O_3，半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3 とおく．

(2) より，C_1 と C_2 のいずれにも直交する円の中心は線分 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ に垂直なある直線上にある．この直線を l とおく．同じく，C_2 と C_3 のいずれにも直交する円の中心は線分 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ に垂直なある直線上にある．この直線を m とおく．

3 つの円の中心 O_1，O_2，O_3 は一直線上にないから，線分 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$，$\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ は平行でない．したがって，l，m も平行でなく，l，m は 1 点で交わる．この交点を P とおく．

P を中心とする C_1 と C_2 のいずれにも直交する円の半径を r_{12} とおくと，この円は C_2 と直交するから，(1) より

$${r_2}^2 + {r_{12}}^2 = {\mathrm{PO}_2}^2 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ．同じく，P を中心とする C_2 と C_3 のいずれにも直交する円の半径を r_{23} とおくと，この円は C_2 と直交するから，(1) より

$${r_2}^2 + {r_{23}}^2 = {\mathrm{PO}_2}^2 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つ．⑤，⑥ の辺々を引くと

$${r_{12}}^2 - {r_{23}}^2 = 0 \qquad \therefore \quad (r_{12}+r_{23})(r_{12}-r_{23}) = 0$$

r_{12}，r_{23} は正の数であるから

$$r_{12} = r_{23}$$

である．したがって，P を中心とする C_1 と C_2 のいずれにも直交する円と P を中心とする C_2 と C_3 のいずれにも直交する円は一致する．

よって，3 つの円 C_1，C_2，C_3 のいずれにも直交する円はただ 1 つ存在する．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)