連立不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y < \dfrac{\pi}{2},\ \tan(x+y) \leqq \sqrt{3}$ を満たす平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の領域を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) 領域 D を平面上に図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$t = 3x + 2y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$2\sqrt{3}\cos^2\left(\dfrac{3}{2}x + y\right) + \sin(3x + 2y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(23 三重大 後 工 2)

【答】

(1) 略

(2) $0 \leqq t \leqq \pi$

(3) 最大値 $2 + \sqrt{3}$，最小値 0

【解答】

$$D : \begin{cases} x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y < \dfrac{\pi}{2} & \cdots\cdots ① \\ \tan(x+y) \leqq \sqrt{3} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

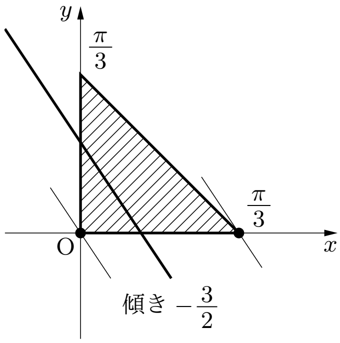
(1) ① より $0 \leqq x + y < \dfrac{\pi}{2}$ であり，この範囲における不等式 ② の解は

$$0 \leqq x + y \leqq \frac{\pi}{3}$$

である．したがって

$$D : \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ x + y \leqq \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

であり，領域 D を図示すると右図の斜線部分となる．



(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くときの $t = 3x + 2y$ のとり得る値の範囲は，D かつ $t = 3x + 2y$ をみたす $x,\ y$ が存在するような t の値の範囲であり．これは領域 D と直線 $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{t}{2}$ が共有点をもつような t の値の範囲である．

直線が点 $(0,\ 0)$ を通るとき　$t = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$

直線が点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$ を通るとき　$t = 3 \cdot \dfrac{\pi}{3} + 2 \cdot 0 = \pi$

であるから

$$\boldsymbol{0 \leqq t \leqq \pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3)
$$F = 2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3}{2}x + y\right) + \sin(3x + 2y)$$

とおく．半角の公式を用いると

$$\begin{aligned} F &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{1 + \cos(3x + 2y)}{2} + \sin(3x + 2y) \\ &= \sin t + \sqrt{3}\cos t + \sqrt{3} \quad (\because\ t = 3x + 2y) \\ &= 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) の結果より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq t + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{4\pi}{3}$ であり，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(t + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 1$ であるから，F の

最大値は　$2 \cdot 1 + \sqrt{3} = \mathbf{2 + \sqrt{3}}$　……(答)

最小値は　$2 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} = \mathbf{0}$　……(答)

である．