$k,\ m$ を実数とする．$y = kx - k^2 - m$ で表される $xy$ 平面内の直線を $l$ とする．$k$ が実数全体を動くとき，$l$ が通過する領域を $D_m$ とする．点 $(x,\ y)$ が領域 $D_m$ 全体を動くとき，$x^2 + y^2$ は最小値をもつ．その最小値を $S(m)$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $l$ が原点を通るような $k$ が存在するための $m$ の条件を求めよ．
(2) 領域 $D_m$ を不等式を用いて表せ．
(3) $S(4)$ の値と，その値をとるときの点 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．
(4) $S(m)$ を求めよ．

(23 岐阜大 後 工 5)

---

【答】

(1) $m \leqq 0$

(2) $y \leqq \dfrac{1}{4}x^2 - m$

(3) $(x,\ y) = \left(\pm 2\sqrt{2},\ -2\right)$ のとき，$S(4) = 12$

(4) $S(m) = \begin{cases} 0 & (m \leqq 0)) \\ m^2 & (0 < m < 2) \\ 4m - 4 & (m \geqq 2) \end{cases}$

---

【解答】

$$l : y = kx - k^2 - m \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $l$ が原点を通るような $k$ が存在するということは

$$0 = k \cdot 0 - k^2 - m \quad \text{すなわち} \quad k^2 = -m$$

を満たす実数 $k$ が存在するということである．

よって，求める $m$ の条件は

$$-m \geqq 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{m \leqq 0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $l$ が通過する領域 $D_m$ は，① を満たす実数 $k$ が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$① \iff k^2 - xk + y + m = 0$$

$$(\text{判別式}) = x^2 - 4(y + m)$$

であり，① が実数解 $k$ を少なくとも一つもつ条件は

$$(\text{判別式}) \geqq 0 \iff \boldsymbol{y \leqq \frac{1}{4}x^2 - m} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

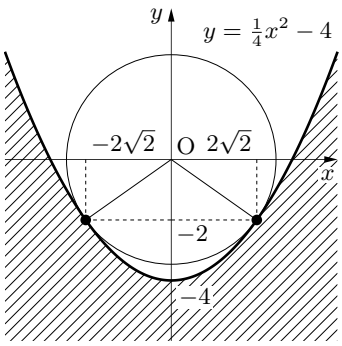
である．

(3) $D_4$ は不等式

$$y \leqq \frac{1}{4}x^2 - 4$$

が表す領域であり，$x^2 + y^2$ は「原点 $(0,\ 0)$ から点 $(x,\ y)$ までの距離の 2 乗」を表すから，求める最小値は原点 $(0,\ 0)$ と曲線 $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 4$ 上の点との距離の 2 乗の最小値である．

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4(y + 4) + y^2 \\ &= (y + 2)^2 + 12 \\ &\geqq 12 \end{aligned}$$




$m = 4$ のとき

となる．$y=-2$ のとき，$x$ 座標は

$$-2=\frac{1}{4}x^2-4 \qquad \therefore \quad x=\pm 2\sqrt{2}$$

であるから

$$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\pm 2\sqrt{2},\ -2\right)\ \text{のとき，}\ S(4)=12} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

(4) $m \leqq 0$ のとき，(1) より原点が $D_m$ に含まれるので，$x^2+y^2$ の

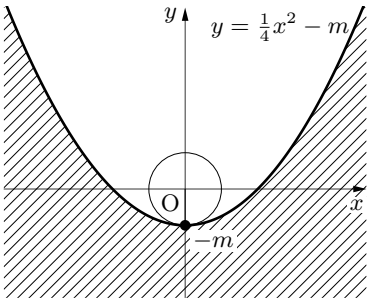
最小値は　0

である．

以下，$m>0$ とする．$D_m$ は不等式

$$y \leqq \frac{1}{4}x^2-m$$

が表す領域であり，$x^2+y^2$ は「原点 $(0,\ 0)$ から点 $(x,\ y)$ までの距離の 2 乗」を表すから，求める最小値は原点 $(0,\ 0)$ と曲線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-m$ 上の点との距離の 2 乗の最小値である．



$0<m<2$ のとき

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4(y+m)+y^2 \\ &= (y+2)^2+4m-4 \end{aligned}$$

となる．$y=\dfrac{1}{4}x^2-m \geqq -m$ であるから，$-m$ と $-2$ の大小で場合分けすると

(i) $-m \leqq -2$ $(m \geqq 2)$ のとき，$x^2+y^2$ は

$y=-2$ のとき，最小値　$4m-4$

をとる．

(ii) $-2<-m<0$ $(0<m<2)$ のとき，$x^2+y^2$ は

$y=-m$ のとき，最小値　$4(-m+m)+m^2=m^2$

をとる．

以上より，$x^2+y^2$ の最小値 $S(m)$ は

$$\boldsymbol{S(m)=\begin{cases} 0 & (m \leqq 0)) \\ m^2 & (0<m<2) \\ 4m-4 & (m \geqq 2) \end{cases}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．