$a,\ b$ を実数とする．xy 平面上の 3 つの領域 $D,\ E_1,\ E_2$ を以下で定める．

D は不等式 $y \geqq 2x^2 + 2ax - b$ の表す領域
E_1 は不等式 $y \geqq x^2 - 2x$ の表す領域
E_2 は不等式 $y \geqq -x^2$ の表す領域

また，領域 E を E_1 と E_2 の共通部分とする．以下の問いに答えよ．

(1) 領域 E を図示せよ．
(2) 領域 D のすべての点が領域 E の点となるような ab 平面上の点 $(a,\ b)$ のうち，b の値が最大となる点 $(a,\ b)$ の座標を求めよ．

(23 東北大 後 理 1)

【答】
(1) 略
(2) $(a,\ b) = \left(\dfrac{-3+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$

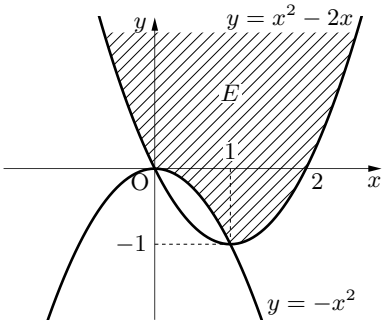
【解答】

$$D : y \geqq 2x^2 + 2ax - b$$
$$E_1 : y \geqq x^2 - 2x$$
$$E_2 : y \geqq -x^2$$

(1) $y = x^2 - 2x$ と $y = -x^2$ の交点の x 座標は

$$x^2 - 2x = -x^2$$
$$\therefore\quad 2x(x-1) = 0$$
$$\therefore\quad x = 0,\ 1$$

であり，領域 $E = E_1 \cap E_2$ は右図の斜線部分である．境界も含む．



(2) 領域 D のすべての点が領域 E の点となる条件は

$$\begin{cases} 2x^2 + 2ax - b \geqq x^2 - 2x & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ 2x^2 + 2ax - b \geqq -x^2 & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x^2 + 2(a+1)x - b \geqq 0 & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ 3x^2 + 2ax - b \geqq 0 & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

がつねに成り立つことである．

$f(x) = x^2 + 2(a+1)x - b$，$g(x) = 3x^2 + 2ax - b$ とおくと

$$f(x) = (x+a+1)^2 - (a+1)^2 - b$$
$$g(x) = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3} - b$$

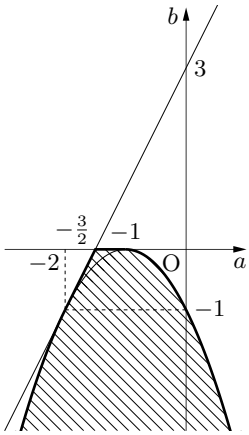
である．

(i) $f(x) \geqq 0\ (x \leqq 0,\ 1 \leqq x)$ がつねに成り立つ条件は，$x \leqq 0,\ 1 \leqq x$ における $f(x)$ の最小値が 0 以上となることであり

$$\begin{cases} f(-a-1) = -(a+1)^2 - b \geqq 0 & (-a-1 \leqq 0 \text{ または } 1 \leqq -a-1 \text{ のとき}) \\ f(0) = -b \geqq 0 & \left(0 \leqq -a-1 \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right) \\ f(1) = 3+2a-b \geqq 0 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq -a-1 \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

すなわち

$$(*) \begin{cases} b \leqq -(a+1)^2 & (a \leqq -2 \text{ または } -1 \leqq a \text{ のとき}) \\ b \leqq 0 & \left(-\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq -1 \text{ のとき}\right) \\ b \leqq 3+2a & \left(-2 \leqq a \leqq -\dfrac{3}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$



$b = -(a+1)^2$ と $b = 3+2a$ を連立すると

$$\begin{aligned} -(a+1)^2 &= 3+2a \\ a^2+4a+4 &= 0 \\ (a+2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

であり，$b = 3+2a$ は $a = -2$ における $b = -(a+1)^2$ の接線であることがわかる．

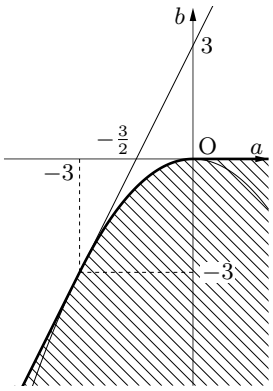
$(*)$ を図示すると右の斜線部分となる．境界も含む．

(ii) $g(x) \geqq 0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ がつねに成り立つ条件は，$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値が 0 以上となることであり

$$\begin{cases} g\left(-\dfrac{a}{3}\right) = -\dfrac{a^2}{3} - b \geqq 0 & \left(0 \leqq -\dfrac{a}{3} \leqq 1 \text{ のとき}\right) \\ g(0) = -b \geqq 0 & \left(-\dfrac{a}{3} \leqq 0 \text{ のとき}\right) \\ g(1) = 3+2a-b \geqq 0 & \left(1 \leqq -\dfrac{a}{3} \text{のとき}\right) \end{cases}$$

すなわち

$$(**) \begin{cases} b \leqq -\dfrac{a^2}{3} & (-3 \leqq a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ b \leqq 0 & (0 \leqq a \text{ のとき}) \\ b \leqq 3+2a & (a \leqq -3 \text{ のとき}) \end{cases}$$



$b = -\dfrac{a^2}{3}$ と $b = 3+2a$ を連立すると

$$\begin{aligned} -\frac{a^2}{3} &= 3+2a \\ a^2+6a+9 &= 0 \\ (a+3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

であり，$b = 3+2a$ は $a = -3$ における $b = -\dfrac{a^2}{3}$ の接線であることがわかる．

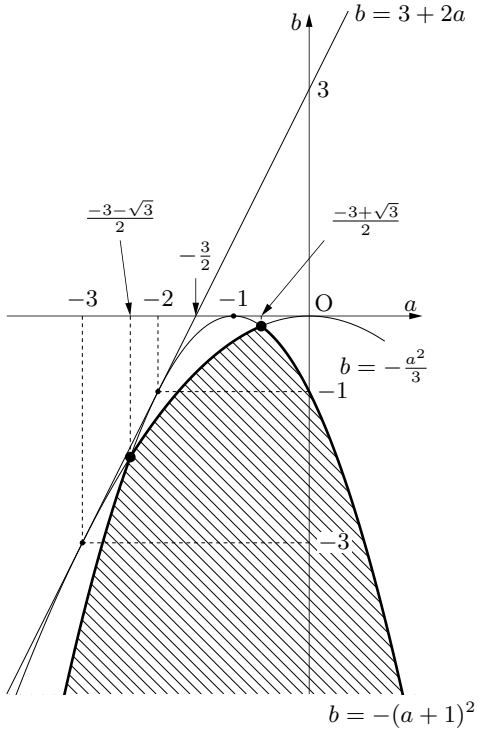
$(**)$ を図示すると右の斜線部分となる．境界も含む．

$(*)$ かつ $(**)$ を満たす領域を図示する．

$b=-(a+1)^2$ と $b=-\dfrac{a^2}{3}$ を連立すると

$$\begin{aligned}-(a+1)^2&=-\frac{a^2}{3}\\ 3(a^2+2a+1)&=a^2\\ 2a^2+6a+3&=0\\ \therefore\quad a&=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

であり，$(*)$ かつ $(**)$ を満たす領域は右図の斜線部分となる．境界も含む．



よって，b の値が最大となるのは $a=\dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}$ のときであり，a は $2a^2+6a+3=0$ を満たすことに注意すると

$$\begin{aligned}-\frac{a^2}{3}&=-\frac{1}{3}\left(-\frac{6a+3}{2}\right)\\ &=\frac{2a+1}{2}\\ &=\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

である．

よって，b の値が最大となる点 $(a,\ b)$ の座標は

$$\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$$

である．

- 定数 $a,\ b$ を分離して考える．
  領域 D のすべての点が領域 E の点となる条件は

$$\begin{cases}2x^2+2ax-b\geqq x^2-2x & (x\leqq 0,\ \ 1\leqq x \text{ のとき})\\ 2x^2+2ax-b\geqq -x^2 & (0\leqq x\leqq 1 \text{ のとき})\end{cases}$$

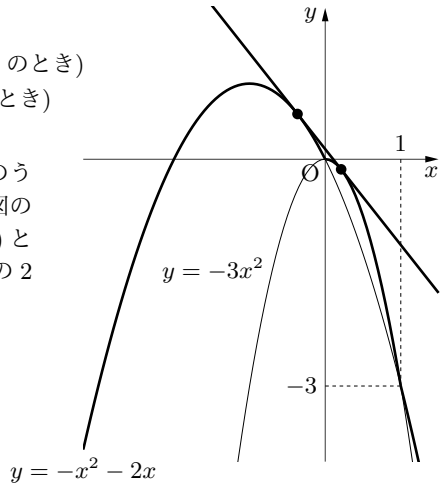
$$\therefore\quad \begin{cases}2ax-b\geqq -x^2-2x & (x\leqq 0,\ \ 1\leqq x \text{ のとき})\\ 2ax-b\geqq -3x^2 & (0\leqq x\leqq 1 \text{ のとき})\end{cases}$$

がつねに成り立つことである．

$$F(x)=\begin{cases}-x^2-2x & (x\leqq 0,\ 1\leqq x \text{ のとき})\\ -3x^2 & (0\leqq x\leqq 1 \text{ のとき})\end{cases}$$

とおくと，すべての実数 x に対して $2ax-b\geqq F(x)$ が成り立つような $a,\ b$ のうち，b が最大 ($-b$ が最小) となるのは，右図のように，直線 $y=2ax-b$ が曲線 $y=F(x)$ と 2 点で接するときである．この条件は 2 つの 2 次方程式

$$\begin{aligned}2ax-b&=-x^2-2x & (x<0)\\ 2ax-b&=-3x^2 & (0<x<1)\end{aligned}$$



すなわち

$$x^2+2(a+1)x-b=0 \quad (x<0)$$
$$3x^2+2ax-b=0 \qquad (0<x<1)$$

がともに重解をもつことである．すなわち

$$\begin{cases}(a+1)^2+b=0\\-(a+1)<0\end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases}a^2+3b=0\\0<-\dfrac{a}{3}<1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}b=-(a+1)^2 & \cdots\cdots ①\\a^2-3(a+1)^2=0 & \cdots\cdots ②\\-1<a<0 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

である．② を解く．

$$\{a+\sqrt{3}(a+1)\}\{a-\sqrt{3}(a+1)\}=0$$

③ より $a-\sqrt{3}(a+1)<0$ であるから

$$a+\sqrt{3}(a+1)=0$$
$$a=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$$

① に代入して

$$b=-\frac{a^2}{3}=\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$$

となる．よって，求める点 $(a,\ b)$ の座標は

$$\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$$

である．