連立不等式

$$x^2+y^2-2x-4y+1 \leqq 0, \quad x+y-3 \geqq 0$$

が表す領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ がこの領域 D を動くとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 領域 D を図示しなさい．
(2) 領域 D において $y-x$ の最大値とそのときの点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を求めなさい．
(3) 領域 D において $y+2x$ の最小値とそのときの点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を求めなさい．
(4) 領域 D において $y+2x$ の最大値を求めなさい．

(23 福島大 後 食農 3)

【答】

(1) 略
(2) $\left(1-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\right)$ のとき，最大値 $1+2\sqrt{2}$
(3) $\left(1-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\right)$ のとき，最小値 $4-\sqrt{2}$
(4) $4+2\sqrt{5}$

【解答】

(1)
$$D:\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+1 \leqq 0 \\ x+y-3 \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2 \leqq 4 \\ y \geqq 3-x \end{cases}$$

であり，境界線の交点の座標は

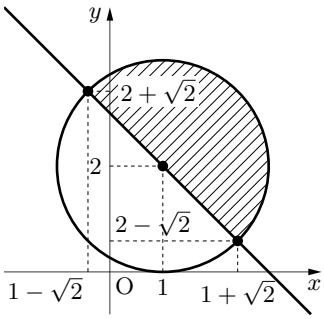
$$(x-1)^2+\{(3-x)-2\}^2=4$$
$$2(x-1)^2=4$$
$$\therefore \quad x=1\pm\sqrt{2}$$

より

$$\left(1\pm\sqrt{2},\ 2\mp\sqrt{2}\right) \qquad \text{(複号同順)}$$

である．

以上より，領域 D は右図の斜線部分となる．境界も含む．



(2) $y-x$ のとりうる値の範囲は，領域 D と直線 $y-x=k$，すなわち，$y=x+k$ が共有点をもつときの k の値の集合である．

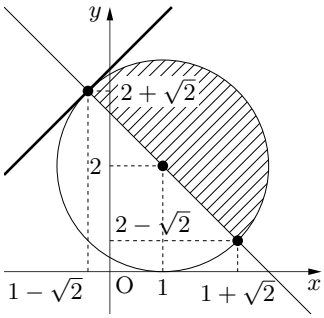
$y=x+k$ と $y=3-x$ が直交することに着目すると，$y-x$ が最大となるのは，$y=x+k$ が

$$\text{点 } \boldsymbol{\left(1-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

を通るときであり，このとき，$y-x$ は**最大値**

$$(2+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})$$
$$=\boldsymbol{1+2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．



(3) $y+2x$ のとりうる値の範囲は，領域 D と直線 $y+2x=k$，すなわち，$y=-2x+k$ が共有点をもつときの k の値の集合である．

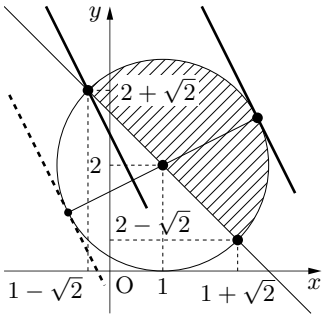
この直線の傾き -2 は直線 $y=-x+3$ の傾き -1 より小さいので，$y+2x$ が最大となるのは，$y=-2x+k$ が

$$\text{点 } \boldsymbol{\left(1-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

を通るときであり，このとき，$y+2x$ は**最小値**

$$(2+\sqrt{2})+2(1-\sqrt{2})$$
$$=\boldsymbol{4-\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．



(4) (3) と同様に考えると，$y+2x$ が最大となるのは，上図のように $y=-2x+k$ が D に接するときである．

直線が円と接する条件は

$$(\text{中心と直線の距離})=(\text{半径})$$

が成り立つことであり

$$\frac{|2\cdot 1+2-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2 \qquad \therefore\quad |k-4|=2\sqrt{5} \qquad \therefore\quad k=4\pm 2\sqrt{5}$$

である．求める最大値は大きい方なので

$$\boldsymbol{4+2\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．