次の連立不等式

$$x+2y \leqq 6, \quad 3x+y \leqq 12, \quad 2x+y \geqq 4, \quad y \geqq 0$$

の表す領域を D とする．点 $(x,\ y)$ がこの領域 D を動くとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 領域 D を図示しなさい．
(2) 領域 D の面積を求めなさい．
(3) $x+y$ の最大値を求めなさい．
(4) $x+y$ の最小値を求めなさい．

(23 福島大 共生システム理工 3)

【答】

(1) 略
(2) $\dfrac{62}{15}$
(3) $\dfrac{24}{5}$
(4) 2

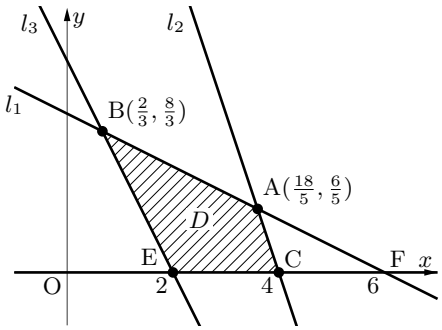
【解答】

(1) 直線 $l_1,\ l_2,\ l_3$ を

$$l_1 : x+2y=6,$$
$$l_2 : 3x+y=12,$$
$$l_3 : 2x+y=4,$$

l_1 と l_2，l_3，x 軸と l_2，l_3 の交点をそれぞれ A，B，C，E とおくと，各点の座標は

$$\mathrm{A}\left(\frac{18}{5},\ \frac{6}{5}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{2}{3},\ \frac{8}{3}\right),$$
$$\mathrm{C}(4,\ 0),\ \mathrm{E}(2,\ 0)$$



である．

よって，領域 D を図示すると図の斜線部分となる．境界も含む．

(2) l_1 と x 軸の交点を F とおくと，領域 D の面積 S は三角形 BEF の面積から三角形 ACF の面積を引いたものである．F の座標は $(6,\ 0)$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot(6-2)\cdot\frac{8}{3}-\frac{1}{2}\cdot(6-4)\cdot\frac{6}{5} \\ &= \frac{16}{3}-\frac{6}{5} \\ &= \boldsymbol{\frac{62}{15}} \end{aligned}$$

……(答)

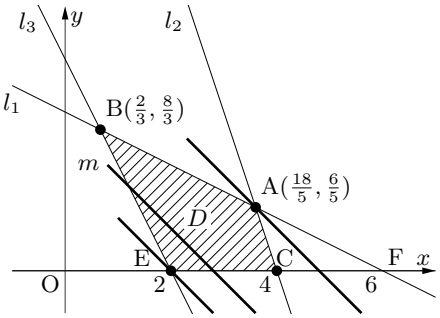
である．

(3) $x+y$ のとりうる値の範囲は，領域 D と直線 $m: x+y=k$ が共有点をもつときの k の値の集合である．

直線 l_1，l_2，l_3 の傾きがそれぞれ $-\dfrac{1}{2}$，-3，-2 であり，直線 m の傾きが -1 であるから，$x+y$ が最大となるのは，直線 m が点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{18}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$ を通るときである．このとき，$x+y$ は

最大値 : $\dfrac{18}{5}+\dfrac{6}{5}=\boldsymbol{\dfrac{24}{5}}$ ……(答)

をとる．



(4) (3) と同じく，$x+y$ が最小となるのは，直線 m が点 E(2, 0) を通るときである．このとき，$x+y$ は

最小値 : $2+0=\mathbf{2}$ ……(答)

をとる．