連立不等式

$$x+3y \leqq 15, \quad 2x+y \leqq 10, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

が表す領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ がこの領域 D を動くとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 領域 D を図示しなさい．
(2) $3x+2y$ の最大値を求めなさい．
(3) $m,\ n$ を自然数とする．点 $\mathrm{Q}(m,\ n)$ が領域 D 上を動くとき，$3m+2n$ が最小となる点 $(m,\ n)$ とその最小値を求めなさい．
(4) 実数 a に対し，$ax+y$ の最大値を求めなさい．

(23 福島大 食農 4)

【答】

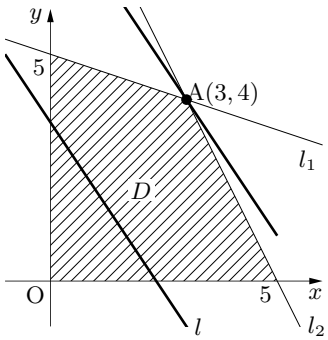
(1) 略
(2) 最大値 17
(3) $(m,\ n)=(1,\ 1)$ のとき，最小値 5
(4) 最大値 $\begin{cases} a \leqq \dfrac{1}{3} \text{のとき} & 5 \\ \dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 2 \text{ のとき} & 3a+4 \\ a \geqq 2 \text{ のとき} & 5a \end{cases}$

【解答】

(1) $l_1 : x+3y=15,$

$l_2 : 2x+y=10$

とおく．2 直線 l_1 と l_2 の交点 A の座標は $\mathrm{A}(3,\ 4)$ であり，直線 l_1 と y 軸の交点の座標は $(0,\ 5)$，直線 l_2 と x 軸の交点の座標は $(5,\ 0)$ であるから，領域 D は右図の斜線部分となる．境界も含む．



(2) $3x+2y$ のとりうる値の範囲は，領域 D と直線 $l : 3x+2y=k$ が共有点をもつときの k の値の集合である．

直線 $l_1,\ l_2$ の傾きがそれぞれ $-\dfrac{1}{3},\ -2$ であり，直線 l の傾きが $-\dfrac{3}{2}$ であるから，k が最大になるのは直線 l が点 $\mathrm{A}(3,\ 4)$ を通るときである．

よって，$3x+2y$ は $(x,\ y)=(3,\ 4)$ のとき

$$\text{最大値} : 3\cdot 3+2\cdot 4=\mathbf{17} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

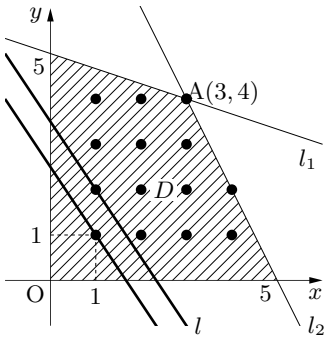
をとる．

(3) $m,\ n$ が自然数のとき，点 $\mathrm{Q}(m,\ n)$ は右図の 14 個の黒丸のいずれかであり，$3m+2n$ が最小になるのは直線 l が点 $(1,\ 1)$ を通るときである．

よって，$3m+2n$ は $(m,\ n)=(1,\ 1)$ のとき

$$\text{最小値}: 3\cdot 1+2\cdot 1=5$$

をとる．



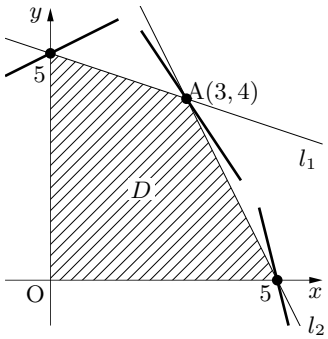
- $m,\ n$ が自然数のとき

$$3m+2n \geqq 3\cdot 1+2\cdot 1=5$$

であり，等号成立は $(m,\ n)=(1,\ 1)$ のときであるから，点 $(1,\ 1)$ が領域 D 内にあるならば，領域 D の形状にかかわらず最小値は 5 である．

(4) $ax+y$ のとりうる値の範囲は，領域 D と直線 $L: ax+y=K$ が共有点をもつときの K の値の集合である．

直線 L の傾きは $-a$ なので，$-a$ と $-\dfrac{1}{3}$，-2 との大小により場合分けする．



(i) $-a \geqq -\dfrac{1}{3}$ $\left(\text{すなわち } a \leqq \dfrac{1}{3}\right)$ のとき

$ax+y$ は L が点 $(0,\ 5)$ を通るとき

$$\text{最大値}: a\cdot 0+5=5$$

をとる．

(ii) $-2 \leqq -a \leqq -\dfrac{1}{3}$ $\left(\text{すなわち } \dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 2\right)$ のとき

$ax+y$ は L が点 $(3,\ 4)$ を通るとき

$$\text{最大値}: a\cdot 3+4=3a+4$$

をとる．

(iii) $-a \leqq -2$ (すなわち $a \geqq 2$) のとき

L が点 $(5,\ 0)$ を通るとき

$$\text{最大値}: a\cdot 5+0=5a$$

をとる．

以上より，$ax+y$ の最大値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq \dfrac{1}{3}} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 2} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{3a+4} \\ \boldsymbol{a \geqq 2} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{5a} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．