実数 a, b が，次の条件を満たすとする．

$(x,\ y)$ を座標とする座標平面において，不等式 $y \geqq ax+b$ が表す領域に点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 1)$ があり，不等式 $y \leqq ax+b$ が表す領域に点 $\mathrm{C}(-3,\ -1)$ と点 $\mathrm{D}(3,\ -1)$ がある．

次の問いに答えよ．

(1) $b=0$ のとき，a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) 与えられた条件を満たす $(a,\ b)$ 全体の集合を，$(a,\ b)$ を座標とする座標平面に図示せよ．

(3) $(x,\ y)$ を座標とする座標平面上で，点 $\mathrm{P}(5,\ -2)$, 点 $\mathrm{Q}(5,\ 3)$ を考える．このとき，直線 $y=ax+b$ は線分 PQ と必ず共有点を持つことを示せ．

(23 金沢大 文系 3)

【答】

(1) $-\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$

(2) 略

(3) 略

【解答】

(1) $b=0$ のときを考える．

不等式 $y \geqq ax$ が表す領域に $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$ があるから

$$\begin{cases} 1 \geqq -a \\ 1 \geqq a \end{cases} \qquad \therefore \quad -1 \leqq a \leqq 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．さらに，不等式 $y \leqq ax$ が表す領域に $\mathrm{C}(-3,\ -1)$，$\mathrm{D}(3,\ -1)$ があるから

$$\begin{cases} -1 \leqq -3a \\ -1 \leqq 3a \end{cases} \qquad \therefore \quad -\frac{1}{3} \leqq a \leqq \frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

a のとり得る値の範囲は，① かつ ② であり

$$\boldsymbol{-\frac{1}{3} \leqq a \leqq \frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

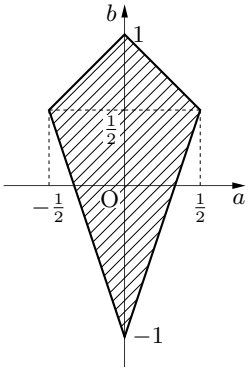
(2) (1) と同じく考える．

不等式 $y \geqq ax+b$ が表す領域に $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$ があるから

$$\begin{cases} 1 \geqq -a+b \\ 1 \geqq a+b \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} b \leqq a+1 \\ b \leqq -a+1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．



さらに，不等式 $y \leqq ax+b$ が表す領域に C$(-3,\ -1)$，D$(3,\ -1)$ があるから

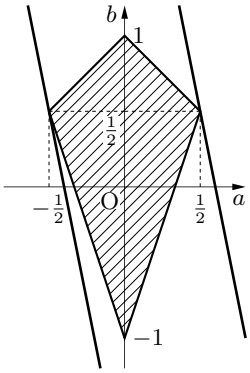
$$\begin{cases} -1 \leqq -3a+b \\ -1 \leqq 3a+b \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} b \geqq 3a-1 \\ b \geqq -3a-1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ．

求める集合は，不等式 ③ かつ ④ を満たすものであり，右図の斜線部分である．境界も含む．

(3) 直線 $y=ax+b$ が線分 PQ と共有点を持つ条件は，P$(5,\ -2)$，Q$(5,\ 3)$ の x 座標が同じで (P の y 座標) $<$ (Q の y 座標) であることに注意すると



$$(\text{P の } y \text{ 座標}) < 5a+b < (\text{Q の } y \text{ 座標})$$

$$\therefore \quad -2 \leqq 5a+b \leqq 3 \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことである．

$k=5a+b$ とおき，k のとり得る値の範囲を求める．k のとり得る値の範囲は，ab 平面における直線 $b=-5a+k$ と (2) で求めた領域が共有点をもつような k の値の集合である．

直線 $b=-5a+k$ が点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき，k は最大値

$$k = 5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

をとる．

また，直線 $b=-5a+k$ が点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき，k は最小値

$$k = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -2$$

をとる．

よって $-2 \leqq u \leqq 3$ となり $(*)$ が示された． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

- $f(x,\ y) = 5x-y+b$ とおく．直線 $y=ax+b$ が線分 PQ と共有点を持つ条件は，P$(5,\ -2)$，Q$(5,\ 3)$ が直線 $f(x,\ y)=0$ に関して反対側にあるまたは少なくとも一方が直線 $f(x,\ y)=0$ 上にあることである．それは

  $$f(5,\ -2)f(5,\ 3) < 0 \text{ または } f(5,\ -2)f(5,\ 3) = 0$$

  すなわち

  $$f(5,\ -2)f(5,\ 3) \leqq 0$$

  を満たすことである．この式を整理すると

  $$(5a+2+b)(5a-3+b) \leqq 0$$

  $$\therefore \quad -2 \leqq 5a+b \leqq 3$$

  となり，$(*)$ を得る．