△ABC において辺 AB を 2 : 3 に内分する点を P とする．辺 AC 上に 2 点 A, C のいずれとも異なる点 Q をとる．線分 BQ と線分 CP との交点を R とし，直線 AR と辺 BC との交点を S とする．

以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ．

(1) 点 Q は辺 AC を 1 : 2 に内分する点とする．このとき，点 S は辺 BC を $\boxed{\text{ア}}$: $\boxed{\text{イ}}$ に内分する点である．

AB = 5 とし，△ABC の内接円が辺 AB，辺 AC とそれぞれ点 P，点 Q で接しているとする．AQ = $\boxed{\text{ウ}}$ であることに注意すると，BC = $\boxed{\text{エ}}$ であり，$\boxed{\text{オ}}$ であることがわかる．

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ 点 R は △ABC の内心
① 点 R は △ABC の重心
② 点 S は △ABC の内接円と辺 BC との接点
③ 点 S は点 A から辺 BC に下した垂線と辺 BC との交点

(2) △BPR と △CQR の面積比について考察する．

(i) 点 Q は辺 AC を 1 : 4 に内分する点とする．このとき，点 R は，線分 BQ を $\boxed{\text{カキ}}$: $\boxed{\text{ク}}$ に内分し，線分 CP を $\boxed{\text{ケコ}}$: $\boxed{\text{サ}}$ に内分する．

したがって

$$\frac{\triangle\text{CQR の面積}}{\triangle\text{BPR の面積}} = \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

(ii) $\dfrac{\triangle\text{CQR の面積}}{\triangle\text{BPR の面積}} = \dfrac{1}{4}$ のとき，点 Q は辺 AC を $\boxed{\text{ソ}}$: $\boxed{\text{タ}}$ に内分する点である．

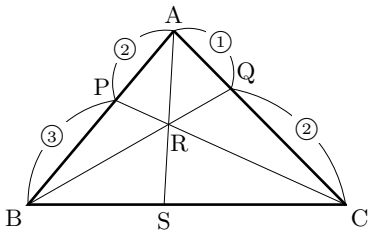
(23 共通テスト 追・再試験 IA 5)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カキ	ク	ケコ	サ	シス	セ	ソ	タ
3	4	2	7	2	15	8	20	3	32	9	5	3

【解答】

(1) チェバの定理より



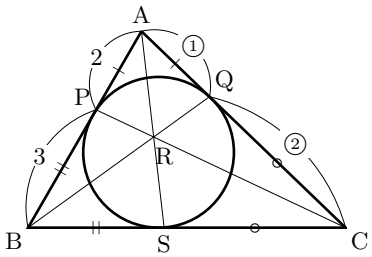
$$\frac{\text{BS}}{\text{SC}} \cdot \frac{\text{CQ}}{\text{QA}} \cdot \frac{\text{AP}}{\text{PB}} = 1$$

$$\frac{\text{BS}}{\text{SC}} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\text{BS}}{\text{SC}} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ BS : SC = **3 : 4** …… ①　　……(答)

である．



AB = 5 の △ABC の内接円が辺 AB，辺 AC とそれぞれ点 P，点 Q で接している．AP : PB = 2 : 3 であるから

$$\mathrm{AP} = 2,\ \mathrm{BP} = 3$$

である．

$$\mathrm{AQ} = \mathrm{AP} = \mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}\mathrm{CQ} &= 2\mathrm{AQ} \quad (\because\ \mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = 1 : 2)\\ &= 2 \times 2\\ &= 4\end{aligned}$$

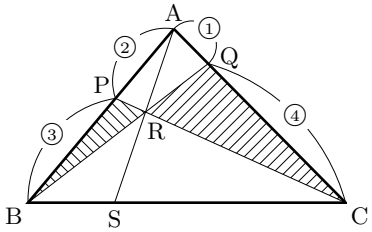
である．よって

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BP} + \mathrm{CQ} = 3 + 4 = \mathbf{7} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，辺 BC 上の接点は BC を BP : CQ = 3 : 4 に内分している．① より，この接点は S と一致する．すなわち，**点 S は △ABC の内接円と辺 BC の接点** である　(②)　……(答)

ことがわかる．

(2) (i) △ABQ と直線 PC にメネラウスの定理を用いると



$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}} \cdot \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{CA}} \cdot \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} = 1$$

$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}} = \frac{15}{8}$$

$$\therefore\ \mathrm{BR} : \mathrm{RQ} = 15 : 8$$

点 R は線分 BQ を **15 : 8** に内分している．

……(答)

また，△ACP と直線 BQ にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}} \cdot \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BA}} \cdot \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}} = 1$$

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}} = \frac{20}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{BR} : \mathrm{RQ} = 20 : 3$$

点 R は線分 CP を **20 : 3** に内分している．　……(答)

したがって

$$\frac{\triangle\mathrm{CQR}\ \text{の面積}}{\triangle\mathrm{BPR}\ \text{の面積}} = \frac{\mathrm{CR} \cdot \mathrm{RQ}}{\mathrm{BR} \cdot \mathrm{RP}} = \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}} \cdot \frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{BR}} = \frac{20}{3} \cdot \frac{8}{15} = \mathbf{\frac{32}{9}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

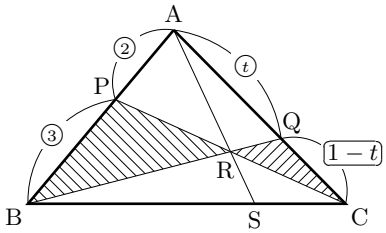
である．

(ii) Q は辺 AC 上の点であり，2 点 A，C のいずれとも異なるから，$0 < t < 1$ を満たす実数 t を用いて

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = t : 1 - t$$

と表すことができる．(i) と同じようにして，$\dfrac{\triangle\mathrm{CQR}\ \text{の面積}}{\triangle\mathrm{BPR}\ \text{の面積}}$ を t で表す．

△ABQ と直線 PC にメネラウスの定理を用いると



$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=1$$
$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{1-t}{1}\cdot\frac{2}{3}=1$$
$$\therefore\quad \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}=\frac{3}{2(1-t)}$$

また，△ACP と直線 BQ にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}}\cdot\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}=1$$
$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$
$$\therefore\quad \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}}=\frac{5(1-t)}{3t}$$

したがって

$$\frac{\triangle\mathrm{CQR}\text{ の面積}}{\triangle\mathrm{BPR}\text{ の面積}}=\frac{\mathrm{CR}\cdot\mathrm{RQ}}{\mathrm{BR}\cdot\mathrm{RP}}=\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}}\cdot\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{BR}}=\frac{5(1-t)}{3t}\cdot\frac{2(1-t)}{3}=\frac{10(1-t)^2}{9t}$$

である．

$\dfrac{\triangle\mathrm{CQR}\text{ の面積}}{\triangle\mathrm{BPR}\text{ の面積}}=\dfrac{1}{4}$ となる t の値は

$$\frac{10(1-t)^2}{9t}=\frac{1}{4}$$
$$40(1-2t+t^2)=9t$$
$$40t^2-89t+40=0$$
$$(5t-8)(8t-5)=0$$

$0<t<1$ より

$$t=\frac{5}{8}$$

である．よって

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=\frac{5}{8}:\left(1-\frac{5}{8}\right)=\mathbf{5:3}$$ ……(答)

である．