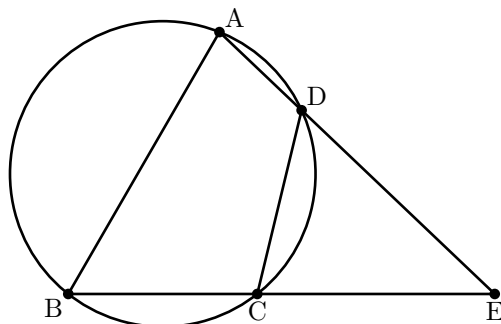


下の図のように、四角形 ABCD は円に内接し、辺 AD と辺 BC をそれぞれ延長した線の交点を E とする。ただし、 $AB = 8$ 、 $BC = 5$ 、 $AD = 3$ 、 $\angle B = 60^\circ$ とする。



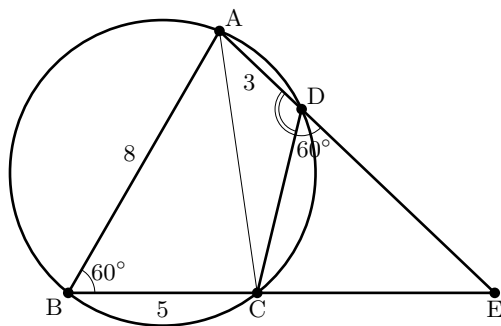
- (1) 辺 CD の長さを求めよ。
- (2) 線分 CE と線分 DE の長さを求めよ。
- (3) 三角形 CDE に内接する円の半径の長さを求めよ。

(23 青森公立大 3)

【答】

- (1) $CD = 5$
- (2) $CE = \frac{245}{39}$, $DE = \frac{275}{39}$
- (3) $\frac{25\sqrt{3}}{26}$

【解答】



- (1) $\triangle ABC$ で余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}
 AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B \\
 &= 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 64 + 25 - 40 \\
 &= 49
 \end{aligned}$$

また、四角形 ABCD は円に内接するから $\angle D = 120^\circ$ である。△ADC で余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \angle D \\ \therefore 49 &= 3^2 + CD^2 - 2 \cdot 3 \cdot CD \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ CD^2 + 3CD - 40 &= 0 \\ (CD + 8)(CD - 5) &= 0 \end{aligned}$$

CD > 0 なので

$$\mathbf{CD = 5} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

(2) △ABC ∽ △CDE であり、AB : CD = 8 : 5 であるから

$$\begin{aligned} &\begin{cases} CE = \frac{5}{8}AE \\ DE = \frac{5}{8}BE \end{cases} \\ &\begin{cases} CE = \frac{5}{8}(3 + DE) \\ DE = \frac{5}{8}(5 + CE) \end{cases} \\ \therefore &\begin{cases} 8CE - 5DE = 15 \\ 5CE - 8DE = -25 \end{cases} \\ \therefore CE &= \frac{15 \cdot 8 - (-25) \cdot 5}{64 - 25} = \frac{\mathbf{245}}{\mathbf{39}} \quad \dots\dots(\text{答}) \\ DE &= \frac{15 \cdot 5 - (-25) \cdot 8}{64 - 25} = \frac{\mathbf{275}}{\mathbf{39}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

である。

(3) △CDE の面積を S とおく。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot CE \cdot \sin \angle EDC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{275}{39} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{5^3 \cdot 11\sqrt{3}}{4 \cdot 39} \end{aligned}$$

である。また、△CDE に内接する円の半径を r とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r(CD + DE + CE) \\ &= \frac{1}{2}r \left(5 + \frac{275}{39} + \frac{245}{39}\right) \\ &= \frac{5(39 + 55 + 49)}{2 \cdot 39}r \\ &= \frac{55}{6}r \end{aligned}$$

である。したがって

$$\frac{55}{6}r = \frac{5^3 \cdot 11\sqrt{3}}{4 \cdot 39} \quad \therefore r = \frac{\mathbf{25\sqrt{3}}}{\mathbf{26}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。