△ABC において，辺 AB を $a:(1-a)$ に内分する点を D，辺 BC を $(1-2a):2a$ に内分する点を E とする．ただし，$0<a<\dfrac{1}{2}$ である．また，線分 AE と CD の交点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}$ とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $a=\dfrac{3}{8}$ とするとき，次の設問に答えなさい．

(i) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表しなさい．

(ii) $\mathrm{DO}:\mathrm{OC}=t:(1-t)$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を t，$\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表しなさい．

(iii) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{1}{6}\vec{p}+\dfrac{2}{9}\vec{q}$ であるとき，a の値を求めなさい．

(23 岩手県大 ソフト情 2)

【答】

(1) (i) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{3}{4}\vec{p}+\dfrac{1}{4}\vec{q}$

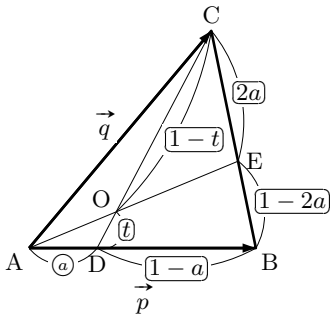
(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{3}{8}(1-t)\vec{p}+t\vec{q}$

(iii) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{1}{3}\vec{p}+\dfrac{1}{9}\vec{q}$

(2) $a=\dfrac{3}{14}$

【解答】

(1) (i) E は辺 BC を $(1-2a):2a$ に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2a\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-2a)\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{(1-2a)+2a}$$
$$=2a\vec{p}+(1-2a)\vec{q} \qquad \cdots\cdots ①$$

$a=\dfrac{3}{8}$ より

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}} \qquad \cdots\cdots ①'$$

……(答)

である．

(ii) $\mathrm{DO}:\mathrm{OC}=t:(1-t)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=a(1-t)\vec{p}+t\vec{q} \qquad \cdots\cdots ②$$

$a=\dfrac{3}{8}$ より

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{3}{8}(1-t)\vec{p}+t\vec{q}} \qquad \cdots\cdots ②'$$

……(答)

である．

(iii) $\mathrm{AO}:\mathrm{OE}=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$=\frac{3}{4}s\vec{p}+\frac{1}{4}s\vec{q} \quad (\because ①') \qquad \cdots\cdots ③$$

と表せる．$\vec{p} \neq \vec{0}$，$\vec{q} \neq \vec{0}$，$\vec{p} \not\parallel \vec{q}$ ($\vec{p}$ と $\vec{q}$ は 1 次独立) であるから，②′，③の係数を比較して

$$\begin{cases} \dfrac{3}{8}(1-t) = \dfrac{3}{4}s \\ t = \dfrac{1}{4}s \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} 2s + t = 1 \\ s = 4t \end{cases} \qquad \therefore \quad t = \frac{1}{9},\ s = \frac{4}{9}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{p} + \frac{1}{9}\vec{q}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- △ABE と直線 DO にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OE}} \times \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CB}} \times \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}} = 1$$
$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OE}} \times \frac{2a}{1} \times \frac{1-a}{a} = 1$$
$$\therefore \quad \mathrm{AO} : \mathrm{OE} = 1 : 2(1-a)$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AO}} &= \frac{1}{1+2(1-a)}\overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ &= \frac{1}{3-2a}\{2a\vec{p} + (1-2a)\vec{q}\} \quad (\because \ ①) \\ &= \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{q}\right) \quad \left(\because \ a = \frac{3}{8}\right) \\ &= \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{1}{9}\vec{q} \end{aligned}$$

である．

(2) $\vec{p} \neq \vec{0}$，$\vec{q} \neq \vec{0}$，$\vec{p} \not\parallel \vec{q}$ ($\vec{p}$ と $\vec{q}$ は 1 次独立) であるから，②，$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \dfrac{1}{6}\vec{p} + \dfrac{2}{9}\vec{q}$ の係数を比較して

$$\begin{cases} a(1-t) = \dfrac{1}{6} \\ t = \dfrac{2}{9} \end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = \frac{3}{14}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．