△OAB において $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，点 C，D が $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$ を満たすとする．線分 CD を $t:(1-t)$ に内分する点を E とするとき以下の問いに答えよ．ただし，$0<t<1$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t で表せ．
(2) 点 E が辺 AB 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．
(3) 点 E が辺 AB 上にあるとき，△ACE の面積 S_1 と △BDE の面積 S_2 の比 $S_1:S_2$ を求めよ．

(23 東北学院大 工・情報 A 2)

【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=3(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$

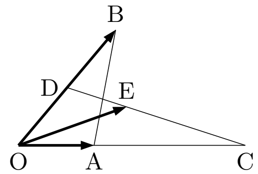
(3) $S_1:S_2=8:3$

【解答】

(1) E は線分 CD を $t:(1-t)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\boldsymbol{3(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}}\quad\cdots\cdots ①\qquad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．



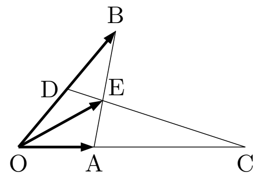
(2) 点 E は線分 CD 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は ① として表すことができ，さらに点 E は線分 AE 上の点でもあるから

$$3(1-t)+\frac{t}{2}=1$$
$$\therefore\quad 3-\frac{5}{2}t=1$$
$$\therefore\quad t=\frac{4}{5}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(3) (1)，(2) より　　$\mathrm{CE}:\mathrm{ED}=t:1-t=4:1$
(2) の結果より　　$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=2:3$
であるから

$$\begin{aligned}S_1:S_2&=1:\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AE}}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{CE}}\\&=1:\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\\&=\boldsymbol{8:3}\qquad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．