△ABC の内部に点 P があり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$$

が成り立っている．

(1) 直線 AP と辺 BC の交点を D とするとき，線分の長さの比 BD : DC と AP : PD を求めよ．

(2) 面積の比 △PAB : △ABC を求めよ．

(23 公立小松大 2)

【答】

(1) BD : DC = 2 : 1，AP : PD = 6 : 1

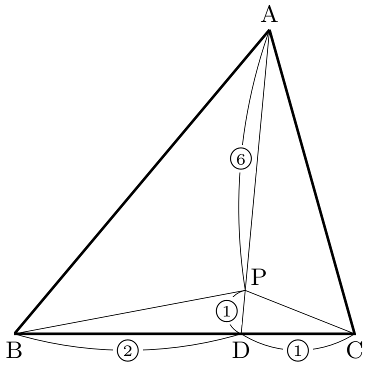
(2) △PAB : △ABC = 4 : 7

【解答】

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0} \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① を変形すると

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = -2(\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}}) = -6\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{2+1}$$



$\overrightarrow{\mathrm{AX}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{2+1}$ とおくと，X は辺 BC 上の点であることがわかる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = -6\overrightarrow{\mathrm{PX}}$$

であり，X は直線 AP 上の点でもある．すなわち，X は直線 AP と辺 BC の交点 D と一致する．

よって，D は線分 BC を 2 : 1 に内分する点であり

$$\mathbf{BD : DC = 2 : 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

P は線分 AD を 6 : 1 に内分する点であり

$$\mathbf{AP : PD = 6 : 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) より

$$\triangle\mathrm{PAB} = \frac{6}{7}\triangle\mathrm{ABD} = \frac{6}{7} \times \frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{4}{7}\triangle\mathrm{ABC}$$

であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{ABC} &= \frac{4}{7}\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ABC} \\ &= \mathbf{4 : 7}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．