$r>1$ とし，$\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OB}=r,\ \angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ の直角三角形 OAB を考える．辺 OB 上に $\mathrm{OM}=1$ である点 M をとる．辺 OA を $s:1-s\ (0<s<1)$ に内分する点を P とし，辺 AB を $t:1-t\ (0<t<1)$ に内分する点を Q とする．$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) 一般に，$\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$ のとき，

$$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$$

であることを証明せよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $r,\ s,\ t,\ \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ のうち必要なものを用いて表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|^2$ と $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ を $r,\ s,\ t$ のうち必要なものを用いて表せ．

(4) $\angle\mathrm{MPQ}=90^\circ$ のとき，t を $r,\ s$ を用いて表せ．

(5) $\angle\mathrm{MPQ}=90^\circ$ とする．このとき，

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PQ}}>1$$

であることを示せ．さらに，$\triangle\mathrm{PQM}\backsim\triangle\mathrm{OAB}$ となる場合に s を r を用いて表せ．

(23 北海道教大 3)

【答】

(1) 略

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=s\overrightarrow{a}-\dfrac{1}{r}\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-s-t)\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|^2=s^2+1$，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=(1-s-t)^2+t^2r^2$

(4) $t=\dfrac{s(1-s)}{s+r}$

(5) 証明は略．$s=\dfrac{r^2-r}{1+r^2}$

【解答】

(1) $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$ であり，$\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とおく．

$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$ ならば，$\theta=90^\circ$ であり

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos 90^\circ=0$$

が成り立つ．

逆に，$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ ならば

$$|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta=0 \qquad \therefore\quad \cos\theta=0 \quad (\because\ \overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0})$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より

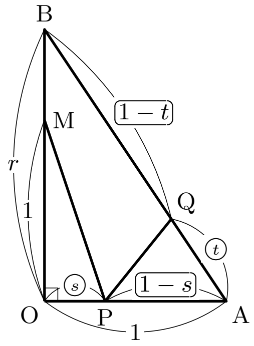
$$\theta=90^\circ$$

である．

よって

$$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$$

である．　……(証明終わり)



(2) まず

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}}\\ &= \boldsymbol{s\vec{a} - \frac{1}{r}\vec{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= \{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\} - s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \boldsymbol{(1-s-t)\vec{a} + t\vec{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(3) (2) より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|^2 &= \left|s\vec{a} - \frac{1}{r}\vec{b}\right|^2\\ &= s^2|\vec{a}|^2 - 2\frac{s}{r}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{r^2}|\vec{b}|^2\\ &= \boldsymbol{s^2+1} \quad (\because\ |\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = r,\ \vec{a}\perp\vec{b}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．同じく

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= |(1-s-t)\vec{a} + t\vec{b}|^2\\ &= (1-s-t)^2|\vec{a}|^2 + 2t(1-s-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2\\ &= \boldsymbol{(1-s-t)^2 + t^2r^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(4) $\angle\mathrm{MPQ} = 90^\circ$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$$

である．ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \left(s\vec{a} - \frac{1}{r}\vec{b}\right)\cdot\{(1-s-t)\vec{a} + t\vec{b}\}\\ &= s(1-s-t)|\vec{a}|^2 + \left(st - \frac{1-s-t}{r}\right)\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{t}{r}|\vec{b}|^2\\ &= s(1-s-t) + 0 - tr\\ &= s(1-s) - (s+r)t\end{aligned}$$

であるから

$$\boldsymbol{t = \frac{s(1-s)}{s+r}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) $\angle\mathrm{MPQ} = 90^\circ$ のとき，(4) より $t = \dfrac{s(1-s)}{s+r}$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= \left\{1 - s - \frac{s(1-s)}{s+r}\right\}^2 + \left\{\frac{s(1-s)}{s+r}\right\}^2 r^2 \quad (\because\ (3))\\ &= \left\{\frac{r(1-s)}{s+r}\right\}^2 + \left\{\frac{rs(1-s)}{s+r}\right\}^2\\ &= (1+s^2)\left\{\frac{r(1-s)}{(s+r)}\right\}^2\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{MP}}|^2\left\{\frac{r(1-s)}{(s+r)}\right\}^2 \quad (\because\ (3))\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PQ}} = \left|\frac{s+r}{r(1-s)}\right| = \frac{s+r}{r(1-s)} \quad (\because\ 0 < s < 1,\ r > 1)$$

である．ここで

$$(s+r)-r(1-s)=s+rs>0 \qquad \therefore \quad \frac{s+r}{r(1-s)}>1$$

である．よって

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PQ}}=\frac{s+r}{r(1-s)}>1 \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

であることが示された．さらに，$\triangle\mathrm{PQM} \backsim \triangle\mathrm{OAB}$ となる場合は

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PQ}}=\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OA}} \qquad \therefore \quad \frac{s+r}{r(1-s)}=\frac{r}{1} \qquad \therefore \quad s+r=r^2(1-s)$$

よって

$$\therefore \quad (1+r^2)s=r^2-r \qquad \therefore \quad \boldsymbol{s=\frac{r^2-r}{1+r^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．